FY1001/TFY4145 Mekanisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2014.

Løsningsforslag til øving 12

Oppgave 1

a) I følge Galileo: ($\overline{S} = \overline{\text{S}}\text{am}$, S = Siv, T = Toget)

$$v^G_{\overline{S}S} = v_{\overline{S}T} + v_{TS}$$

I følge Einstein:

$$v^E_{\overline{S}S} = \frac{v_{\overline{S}T} + v_{TS}}{1 + v_{\overline{S}T}v_{TS}/c^2}$$

Dermed:

$$\frac{v^G_{\overline{S}S} - v^E_{\overline{S}S}}{v^G_{\overline{S}S}} = v_{\overline{S}T}v_{TS}/c^2 = 3.4 \cdot 10^{-14}\,\%$$

Her har vi brukt at

$$\frac{1}{1 + v_{\overline{S}T}v_{TS}/c^2} \simeq 1 - v_{\overline{S}T}v_{TS}/c^2$$

når hastighetene $v_{\overline{S}T}$ og v_{TS} er små i forhold til c, og det er jo tilfelle her. Med andre ord: Ingen stor feil å bruke galileisk relativitet her.

b)

$$v_{\overline{S}S} = \frac{c/2 + 3c/4}{1 + (1/2) \cdot (3/4)} = \frac{10c}{11}$$

Legg merke til at $\overline{\text{S}}$ams hastighet i forhold til Siv er mindre enn c. I følge Galileo ville den ha vært $5c/4$.

c) Vi bruker tipset i oppgaven og innfører dimensjonsløse størrelser $\beta = v_{\overline{S}S}/c$, $\beta_1 = v_{\overline{S}T}/c$ og $\beta_2 = v_{TS}/c$. Oppgaven blir å vise at hvis både $\beta_1 < 1$ og $\beta_2 < 1$, så er også $\beta < 1$, eventuelt $\beta^2 < 1$:

$$\begin{aligned}
\beta^2 &= \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}\right)^2 \\
&= \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2}{1 + \beta_1^2\beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2} \\
&= \frac{1 + \beta_1^2\beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2}{1 + \beta_1^2\beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2} - \frac{1 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2}{1 + \beta_1^2\beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2} \\
&= 1 - \frac{\left(1 - \beta_1^2\right)\left(1 - \beta_2^2\right)}{\left(1 + \beta_1\beta_2\right)^2} \\
&< 1
\end{aligned}$$

Oppgave 2

Vi kjenner $\overline{\text{S}}$ams hastighet i forhold til Siv:

$$v_{\overline{S}S} = \frac{5c}{8}$$

Kulas hastighet i forhold til Siv:

$$v_{KS} = \frac{v_{KA} + v_{AS}}{1 + v_{KA}v_{AS}/c^2} = \frac{8c}{13}$$

(Her er hele tiden v_{ij} hastigheten til i i forhold til j, og A, K og S står for Arne, Kula og Siv.) Altså har kula litt mindre hastighet enn $\overline{\text{S}}$am, slik at $\overline{\text{S}}$am overlever.
Vi kan bruke Einsteins regel for addisjon av hastigheter til å bestemme alle fires hastigheter i forhold til hverandre. Oppsummert i en tabell (med alle hastigheter i enheten c):

hastigheten til... → ...i forhold til ↓	S	A	K	$\overline{S}$
S	0	3/8	8/13	5/8
A	-3/8	0	5/16	16/49
K	-8/13	-5/16	0	1/64
$\overline{S}$	-5/8	-16/49	-1/64	0

Vi ser at $\overline{\text{S}}$am har større hastighet enn kula, uansett hvem vi spør.

Oppgave 3

Avstanden fra deg til klokke nr 201 er $200 \cdot 300000$ km. Lyset bruker 200 sekunder på denne strekningen. Følgelig *ser* du at klokke nr 201 viser 11:56:40 når klokke nr 1 viser 12:00:00.
Men du *observerer*, dvs *måler*, at klokke nr 201 er 12:00:00, fordi du vet at du må korrigere for at lyset har reist $200 \cdot 300000$ km for å nå fram til øyet ditt.

Oppgave 4

$\overline{\text{S}}$am reiser i alt en avstand $\Delta x = 24$ lysår. Hastigheten hans er $v = 0.98c$. Han må dermed ha brukt en tid $\Delta t = \Delta x/v = 24.490$ år. Siv er med andre ord ca 42 og et halvt år når $\overline{\text{S}}$am kommer hjem.
På grunn av tidsdilatasjon går $\overline{\text{S}}$ams klokker betydelig langsommere (både den klokka han har på armen og hans biologiske klokke). Han måler et tidsforbruk $\Delta\bar{t} = \Delta t/\gamma = 4.873$ år. $\overline{\text{S}}$am er dermed snaut 23 år når han kommer hjem.

"Paradokset": Vil det ikke fra $\overline{\text{S}}$ams synsvinkel være omvendt? Dvs, slik at det er Siv som reiser med hastighet $0.98c$ mens $\overline{\text{S}}$am forholder seg i ro? I såfall burde $\overline{\text{S}}$am konkludere med at det er Siv som er den yngste av de to når han kommer hjem.
Kortforklaringen på at dette *ikke* er tilfelle: $\overline{\text{S}}$am er ikke i ett og samme inertialsystem under hele reisen. Han må gjennomgå en akselerasjon i det han snur. Siv, derimot, er hele tiden i samme inertialsystem, så vi må stole på henne. Altså *er* Siv eldre enn $\overline{\text{S}}$am.

Problemet kan analyseres noe mer inngående: Vi innser raskt at vi her har med *tre* inertialsystem å gjøre: S, der Siv hele tiden er i ro; $\overline{S}$, der romskipet og $\overline{\text{S}}$am er i ro på utreisen; $\hat{S}$, der romskipet og $\overline{\text{S}}$am er i ro på hjemreisen. Ulike hendelser, og dermed ulike lengder og tidsintervaller, i de ulike inertialsystemene vil være relatert via lorentztransformasjonene (LT). Vi velger hendelsen *avreise* (A) ved tidspunktet $t_A = \bar{t}_A = \hat{t}_A = 0$ og i posisjonen $x_A = \bar{x}_A = \hat{x}_A = 0$. Hendelsen A definerer med andre ord et felles origo for de tre inertialsystemene. Positiv retning i rommet velges fra jorda og mot Epsilon Indi (EI). Det betyr at aktuelle relative hastigheter er

$$\begin{aligned} v_{\overline{S}S} &= v = 0.98c \\ v_{\hat{S}S} &= -v = -0.98c \\ v_{\overline{S}\hat{S}} &= \frac{v_{\overline{S}S} + v_{S\hat{S}}}{1 + v_{\overline{S}S}v_{S\hat{S}}/c^2} = \frac{v+v}{1+v^2/c^2} \simeq 0.9998c \end{aligned}$$

Vi trenger her bare å bruke de to første, som har samme lorentzfaktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 5.025$$

Neste hendelse (B) er at $\overline{\text{S}}$am ankommer EI. I Sivs verden S er da $x_B = 12$ (lysår) og $t_B = x_B/v = 12/0.98 = 12.245$ (år). LT gir oss "koordinatene" for hendelse B i $\overline{S}$ og $\hat{S}$:

$$\begin{aligned}
\overline{x}_B &= \gamma(x_B - vt_B) = 0 \\
\overline{t}_B &= \gamma(t_B - vx_B/c^2) = \gamma\frac{x_B}{v}(1 - v^2/c^2) = \frac{x_B}{\gamma v} = \frac{12}{5.025 \cdot 0.98} = 2.437 \\
\hat{x}_B &= \gamma(x_B + vt_B) = 2\gamma x_B = 2 \cdot 5.025 \cdot 12 = 120.605 \\
\hat{t}_B &= \gamma(t_B + vx_B/c^2) = \gamma t_B(1 + v^2/c^2) = 120.625
\end{aligned}$$

Dette betyr at $\overline{\text{S}}$ams klokke viser 2.437 umiddelbart før han snur. Det at han snur innebærer at han hopper fra inertialsystemet $\overline{S}$ til $\hat{S}$. Riktig klokke i $\hat{S}$ viser 120.625. Følgelig må $\overline{\text{S}}$am stille klokka si 118.188 år fram hvis han ønsker at klokka hans skal vise det samme som alle andre klokker i $\hat{S}$. Dette betyr selvsagt ikke at $\overline{\text{S}}$am plutselig har blitt 118.188 år eldre. Han er fortsatt 18 + 2.437 = 20.437 år gammel.
Neste hendelse (C) er at $\overline{\text{S}}$am kommer hjem. I Sivs verden S har denne hendelsen koordinatene $x_C = 0$ og $t_C = 2t_B = 24.490$. LT gir oss igjen de tilsvarende koordinatene i $\overline{S}$ og $\hat{S}$:

$$\begin{aligned}
\overline{x}_C &= \gamma(x_C - vt_C) = -120.601 \\
\overline{t}_C &= \gamma(t_C - vx_C/c^2) = \gamma t_C = 123.062 \\
\hat{x}_C &= \gamma(x_C + vt_C) = \gamma v t_C = 120.601 \\
\hat{t}_C &= \gamma(t_C + vx_C/c^2) = \gamma t_C = 123.062
\end{aligned}$$

Her må vi holde tunga rett i munnen: Turen hjem, målt med $\overline{\text{S}}$ams klokke, varte $\hat{t}_C - \hat{t}_B = 123.062 - 120.625 = 2.437$ år (enten han stilte klokka eller ikke). Ikke overraskende tok det like lang tid begge veier. $\overline{\text{S}}$am konkluderer med at han har blitt 4.874 år eldre siden avreise (hendelse A). Altså er Siv og $\overline{\text{S}}$am enige om $\overline{\text{S}}$ams alder, 22.874 år, ved hjemkomst (hendelse C).

Det gjenstår da kun å kontrollere at de også er enige om Sivs alder ved hjemkomst. $\overline{\text{S}}$am må nå forholde seg til inertialsystemene $\hat{S}$ og S. Hele reisen, fra hendelse A til hendelse C tok en tid $\hat{t}_C - \hat{t}_A = 123.062$ år. Sett fra $\hat{S}$ har inertialsystemet S hele tiden hatt konstant hastighet $v = 0.98c$. En observatør i $\hat{S}$ (og det er jo nettopp det $\overline{\text{S}}$am er ved hjemkomst!) vil da, med rette, hevde at en tidsmåling i S mellom hendelsene A og C må vise

$$\frac{\hat{t}_C - \hat{t}_A}{\gamma} = \frac{123.062}{5.025} = 24.490$$

Og det er nettopp hva Siv selv hevder hun har målt, så Siv og $\overline{\text{S}}$am er også enige om Sivs alder ved hjemkomst, 42.490 år.

Oppgave 5

Myonets totale energi er $E_\mu = \gamma mc^2 = 2 \cdot 10^9$ eV, mens dets hvileenergi er $E_\mu^0 = mc^2 = 105.7 \cdot 10^6$ eV. Det betyr at lorentzfaktoren er

$$\gamma = \frac{E_\mu}{E_\mu^0} = 18.92$$

Myonets hastighet er dermed

$$v = c\sqrt{1 - 1/\gamma^2} = 0.9986\, c$$

Den oppgitte levetiden på 2.2 μs gjelder for myoner med lave hastigheter. Observert fra jorda vil dermed et myon med hastighet $0.9986\,c$ ha en levetid

$$\Delta t = \gamma \Delta \bar{t} = 18.92 \cdot 2.2\mu\text{s} = 41.6\mu\text{s}$$

På denne tiden reiser myonet en avstand

$$\Delta x = v\Delta t = 12.5\,\text{km}$$

som er av samme størrelsesorden som avstanden fra jorda og opp til de øvre deler av atmosfæren, der myonet ble dannet.

Oppgave 6

a) Da pionet ligger i ro ($v_\pi = 0$), er total energi

$$E_{\text{tot}} = m_\pi c^2,$$

dvs pionets hvileenergi. Energibevarelse gir dermed

$$m_\pi c^2 = E_\mu + E_\nu,$$

der E_μ og E_ν er hhv myonets og nøytrinoets energi. Nøytrinoets masse antas å være omtrent lik null, slik at

$$E_\nu = p_\nu c,$$

der p_ν er nøytrinoets impuls. Myonets energi er

$$E_\mu = \sqrt{p_\mu^2 c^2 + m_\mu^2 c^4}.$$

Systemets totale impuls er lik null (siden pionet lå i ro), så impulsbevarelse gir

$$\boldsymbol{p}_\nu + \boldsymbol{p}_\mu = 0.$$

Altså er myonets og nøytrinoets impulser like store i absoluttverdi,

$$p_\nu = p_\mu = p.$$

Vi har videre

$$E_\nu = pc = \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4},$$

slik at

$$m_\pi c^2 = E_\mu + \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4}.$$

Løser vi denne ligningen mhp E_μ, finner vi

$$E_\mu = \frac{\left(m_\pi^2 + m_\mu^2\right) c^2}{2m_\pi}$$

b) Vi har

$$p = E_\nu / c = \frac{1}{c}\left(m_\pi c^2 - E_\mu\right) = \frac{c}{2}\left(m_\pi - \frac{m_\mu^2}{m_\pi}\right)$$

Sammenhengen mellom myonets impuls p og hastighet v_μ er

$$p = \frac{m_\mu v_\mu}{\sqrt{1 - v_\mu^2/c^2}}.$$

Kombinasjon av disse to ligningene gir

$$\frac{m_\mu v_\mu}{\sqrt{1 - v_\mu^2/c^2}} = \frac{c}{2}\left(m_\pi - \frac{m_\mu^2}{m_\pi}\right),$$

DETALJER:

La oss innføre dimensjonsløse størrelser $x = v_\mu/c$ og $y = m_\mu/m_\pi$ (som begge er mindre enn 1). Da kan denne ligningen skrives slik:

$$2x = (1/y - y)\sqrt{1 - x^2}.$$

Kvadrering på begge sider gir

$$4x^2 = (y^2 - 2 + 1/y^2)(1 - x^2).$$

Samler ledd med x^2 på venstre side:

$$x^2(y^2 + 2 + 1/y^2) = y^2 - 2 + 1/y^2.$$

Her er høyre side lik $(y - 1/y)^2$ mens parentesen på venstre side er lik $(y + 1/y)^2$, slik at

$$x = \frac{1/y - y}{1/y + y} = \frac{m_\pi/m_\mu - m_\mu/m_\pi}{m_\pi/m_\mu + m_\mu/m_\pi}.$$

(NB: Her tok vi kvadratroten på begge sider, og må da passe på at vi beholder fortegn slik at begge sider er *positive*!)
Multiplikasjon med faktoren $m_\mu m_\pi$ over og under brøkstreken på høyre side gir endelig

$$x = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2},$$

som var det vi skulle fram til.

DETALJER FERDIG!

og løsning av denne lignignen mhp v_μ gir

$$v_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2}\, c$$

Tallverdier: $E_\mu = 109.78$ MeV, $v_\mu/c = 0.27$.

Oppgave 7

La S være inertialsystemet der $pc = 3$ (GeV) og $\overline{\mathrm{S}}$ systemet der $\overline{p}c = 4$. Partikkelens totale energi i S er $E = 5$.

a) Partikkelens hvileenergi er (ved hjelp av den nyttige sammenhengen $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$)

$$mc^2 = \sqrt{E^2 - p^2c^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$$

(nok en gang: i enheten GeV). Dermed er partikkelens totale energi i $\overline{\mathrm{S}}$

$$\overline{E} = \sqrt{\overline{p}^2c^2 + m^2c^4} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2} \simeq 5.66.$$

(Merk: I et *gitt* system er total energi *bevart*, dvs total energi endres ikke i en kollisjon, en fusjonsprosess, en fisjonsprosess e.l. Men: Total energi er *ikke en invariant størrelse*, dvs ikke den samme i ulike inertialsystemer S og $\overline{\mathrm{S}}$.)

b) Vi regnet ut hvileenergien i punkt a). Partikkelens masse er dermed

$$m = 4 \text{ GeV}/c^2 = 7.11 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \simeq 4.3u.$$

c) Sammenhengen mellom relativistisk impuls p og hastighet v er

$$p = \gamma m v,$$

med lorentzfaktoren $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. (Alle hastigheter foregår her langs en og samme akse, så vi kan droppe vektorsymboler.) Løsning av ligningen over med hensyn på v gir

$$v = c \cdot \frac{pc}{\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}} = c \cdot \frac{pc}{E} = \frac{3c}{5}.$$

Tilsvarende,

$$\overline{v} = c \cdot \frac{\overline{p}c}{\overline{E}} = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Einsteins addisjonsformel,

$$\overline{v} = \frac{u + v}{1 + uv/c^2},$$

gir til slutt

$$u = \frac{\overline{v} - v}{1 - \overline{v}v/c^2} = \frac{5 - 3\sqrt{2}}{5\sqrt{2} - 3}c \simeq 0.186c.$$

Oppgave 8

Her studerer vi en fullstendig uelastisk kollisjon mellom en partikkel med masse m og kinetisk energi $2mc^2$, og en partikkel i ro med masse $2m$. Vi har bruk for systemets totale impuls:

$$pc = \sqrt{(3mc^2)^2 - (mc^2)^2} = \sqrt{8}mc^2.$$

Her har vi brukt at partikkelen med masse m har hvileenergi mc^2, og dermed total energi $3mc^2$. Systemets totale energi er

$$E = 3mc^2 + 2mc^2 = 5mc^2.$$

Verken total impuls eller total energi endres i kollisjonen. Dermed må vi ha sammenhengen

$$(5mc^2)^2 = (\sqrt{8}mc^2)^2 + M^2c^4,$$

dvs

$$M = \sqrt{17}m \simeq 4.1m.$$

Oppgave 9

a) La oss f.eks. legge positiv x-akse mot øst og positiv y-akse mot nord. Videre kan vi si at partikkelen som farer mot vest (dvs negativ x-retning) er nr 1 og at den som farer mot sør (dvs negativ y-retning) er nr 2. Det er da klart, pga impulsbevarelse (total impuls er lik null), at partikkel nr 3 må ha retning mot nordøst, dvs med hastighet med positiv x- og y-komponent. Vi kaller vinkelen mellom positiv x-akse og $\boldsymbol{p}_3$ for θ. Da gir impulsbevarelse at

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{3x} = p_3 \cos\theta \\ p_2 &= p_{3y} = p_3 \sin\theta \\ p_3^2 &= p_1^2 + p_2^2 \end{aligned}$$

Vi trenger p_1 og p_2:

$$\begin{aligned} p_1 &= \gamma_1 m v_1 = \frac{4mc/5}{\sqrt{1-16/25}} = \frac{4}{3}mc \\ p_2 &= \gamma_2 m v_2 = \frac{3mc/5}{\sqrt{1-9/25}} = \frac{3}{4}mc \end{aligned}$$

Dermed:

$$p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 = (mc)^2(16/9 + 9/16) = 337(mc)^2/144.$$

Samtidig har vi

$$p_3^2 = \gamma_3^2 m^2 v_3^2,$$

som løst mhp v_3^2 gir

$$v_3^2 = c^2 \frac{p_3^2c^2}{m^2c^4 + p_3^2c^2} \simeq 0.701c^2,$$

dvs

$$v_3 \simeq 0.837c.$$

Retningen til partikkel 3 er gitt ved at $\tan\theta = p_2/p_1$, dvs

$$\theta = \arctan(p_2/p_1) = \arctan(9/16) \simeq 29^\circ.$$

b) Vi bruker energibevarelse til å fastlegge masseforholdet M/m. Total energi er Mc^2, siden partikkelen er i ro i utgangspunktet. Energien til hver av de tre partiklene etter spaltingen er

$$E_j = \sqrt{p_j^2 c^2 + m^2 c^4} \quad , \quad j = 1, 2, 3.$$

Følgelig:

$$M = \left(\sqrt{16/9 + 1} + \sqrt{9/16 + 1} + \sqrt{337/144 + 1} \right) m \simeq 4.74m.$$

Oppgave 10

Relativ hastighet mellom de to satellittene:

$$v_{12} = \frac{v + v}{1 + v^2/c^2} = \frac{2v}{1 + v^2/c^2}.$$

Dermed er frekvensen mottatt av satellitt nr to:

$$f = f_0 \sqrt{\frac{c - v_{12}}{c + v_{12}}} = f_0 \sqrt{\frac{1 - v_{12}/c}{1 + v_{12}/c}}.$$

Innsetting av v_{12} gir (med $\beta = v/c$)

$$\begin{aligned} f &= f_0 \sqrt{\frac{1 - 2\beta/(1 + \beta^2)}{1 + 2\beta/(1\beta^2)}} \\ &= f_0 \sqrt{\frac{1 + \beta^2 - 2\beta}{1 + \beta^2 + 2\beta}} \\ &= f_0 \frac{1 - \beta}{1 + \beta}. \end{aligned}$$

Med $\beta \ll 1$ blir

$$f/f_0 \simeq (1 - \beta)(1 - \beta) \simeq 1 - 2\beta.$$

Her har vi brukt at $1/(1 + x) \simeq 1 - x$ dersom $|x| \ll 1$.