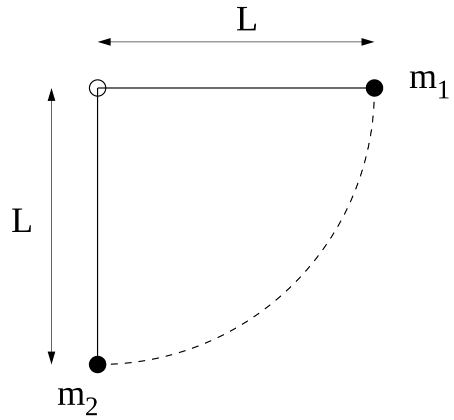
FY1001/TFY4109/TFY4145. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2015.
Øving 4. Veiledning: 21. - 24. september.



Oppgave 1: Kulekollisjoner

To kuler med masse m_1 og m_2 er hengt opp i samme punkt med tynne, vektløse snorer med lengde L. Kula med masse m_1 trekkes ut til snora er horisontal og slippes. Den svinger nedover og treffer kula med masse m_2 i et sentralt støt. Betrakt kulene som punktmasser slik at snorene er vertikale når kollisjonen skjer.

a) Hva er hastigheten v_1 til massen m_1 like før støtet?

A) $\sqrt{gL/2}$ B) $\sqrt{gL}$ C) $\sqrt{2gL}$ D) $\sqrt{3gL}$ E) $\sqrt{4gL}$

b) Hva er strekket S_1 i snora som m_1 henger i like før støtet?

A) $m_1 g$ B) $2m_1 g$ C) $3m_1 g$ D) $4m_1 g$ E) $5m_1 g$

c) Anta at kulene er klebrige og henger sammen etter kollisjonen, dvs kollisjonen er fullstendig uelastisk. Hvor høyt kommer kulene da etter kollisjonen?

A) L B) $L \cdot (m_1/m_2)$ C) $L \cdot (m_1/(m_1+m_2))$ D) $L \cdot (m_2/(m_1+m_2))$ E) $L \cdot (m_1/(m_1+m_2))^2$

d) Hva er forholdet mellom mekanisk energi etter og før denne fullstendig uelastiske kollisjonen?

A) $m_1/(m_1+m_2)$ B) $m_2/(m_1+m_2)$ C) $(m_2/(m_1+m_2))^2$ D) m_1/m_2 E) m_2/m_1

Anta heretter at kollisjonen er elastisk.

e) Hva er hastigheten til kule 2 like etter kollisjonen.

A) v_1 B) $v_1 \cdot 2m_1/(m_1+m_2)$ C) $v_1 \cdot m_1/(m_1+m_2)$ D) $v_1 \cdot 2m_2/(m_1+m_2)$ E) $v_1 \cdot m_1/m_2$

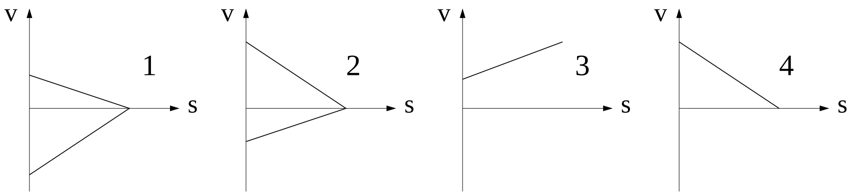
f) Hva må masseforholdet m_1/m_2 minst være for at kule 2 etter støtet skal svinge helt rundt, dvs nå topp-punktet med stram snor?

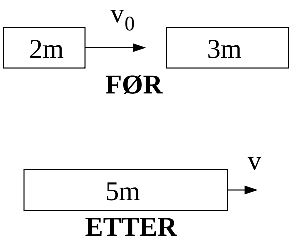
A) 6 B) 5/3 C) $\sqrt{5}/\sqrt{8}$ D) $\sqrt{8}/(\sqrt{8}-\sqrt{5})$ E) $\sqrt{5}/(\sqrt{8}-\sqrt{5})$

Oppgave 2: Litt ymse

a) En kloss sendes oppover et skråplan. Det er friksjon mellom klossen og underlaget. Hvilken eller hvilke av figurene viser mulig graf for klossens hastighet v? (s angir klossens posisjon på skråplanet, og v og s er begge positive i retning oppover skråplanet.)

A) Kun graf 1.
B) Kun graf 2.
C) Graf 2 og 4.
D) Graf 1 og 3.





b) En kloss med masse $2m$ kolliderer fullstendig uelastisk med en kloss med masse $3m$. Før kollisjonen har klossen med masse $2m$ hastighet v_0 mens klossen med masse $3m$ ligger i ro. Etter kollisjonen har klossene felles hastighet v. Hvor mye mekanisk energi har gått tapt i kollisjonen?

A) $mv_0^2/3$ B) $2mv_0^2/5$
C) $3mv_0^2/5$ D) mv_0^2

Oppgave 3: Saturn V, trinn 1

Rakett-typen som blant annet sørget for å bringe Apollo 11 fra jorda til månen i juli 1969 kalles Saturn V. I det første av i alt tre rakett-trinn ble 13.2 tonn drivstoff forbrent pr sekund (dvs $dm/dt = -13.2 \cdot 10^3$ kg/s) og blåst ut bakover med en hastighet $|u| = 2.58$ km/s relativt raketten. Etter 2.5 minutter var alt drivstoff i trinn 1 brukt opp. Oppskytingen startet med raketten i ro på bakken, der tyngdens akselerasjon er $g = 9.81$ m/s^2. Total masse før avreise var $3.04 \cdot 10^6$ kg.

a) Bruk "rakettligningen" (som vi utledet i forelesningene)

$$ma = F_{\text{ytre}} + F_{\text{skyv}}$$

til å vise at rakettens hastighet etter en tid t blir

$$v(t) = -u \ln \frac{m_0}{m} - gt.$$

Her er m_0 startmassen, mens $m = m(t)$ er gjenværende masse ved tidspunktet t. Vi har valgt positiv retning oppover, slik at ytre kraft på raketten er $-mg$. Skyvkraften er $u \cdot \beta$, der u er eksosens hastighet relativt raketten og $\beta = dm/dt$ angir forbrent drivstoffmasse pr tidsenhet. Her er både u og β negative størrelser, og vi antar at de begge er konstante, som antydet innledningsvis. Vi antar også at tyngdens akselerasjon g kan regnes som konstant. (Denne antagelsen kan du se nærmere på i et frivillig ekstrapunkt *e*) nedenfor.)

b) Hvor stor må skyvkraften minst være for at raketten i det hele tatt skal ta av fra bakken? Sjekk at dette var tilfelle for Saturn V. Regn ut drivstoffmassen m_d ved avreise, $t = 0$, og rakettens sluttmasse m_f ved tidspunktet t_f, dvs idet alt drivstoff er brukt opp.

c) Vis at rakettens akselerasjon kan skrives som

$$a(t) = \frac{u\beta}{m_0 + \beta t} - g.$$

Bestem akselerasjonen ved $t = 0$. Bestem også akselerasjon og hastighet ved slutten av trinn 1, dvs ved $t = t_f$.

d) Det oppgis at dersom $|x| \ll 1$, er det en god tilnærmelse å erstatte brøken $1/(1+x)$ med polynomet $1 - x$. (Prøv for eksempel med $x = -0.01$.) Bruk Rottmann til å verifisere at $1/(1+x) \simeq 1 - x$ når $|x| \ll 1$. Bruk deretter denne opplysningen til å vise at

$$a_{\text{lin}}(t) = a(0) - \frac{u\beta^2}{m_0^2}\,t$$

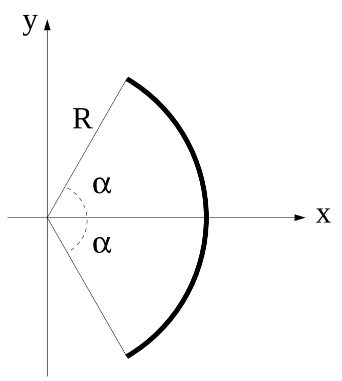
er en god tilnærmelse for $a(t)$ så lenge $t \ll m_0/(-\beta)$. Ta utgangspunkt i Python/Matlab-programmet rakett.py/rakett.m og modifiser et par av linjene slik at du får plottet $a(t)$ og $a_{\text{lin}}(t)$ i samme figur, for $0 < t < t_f$. Anslå på øyemål ved hvilket tidspunkt $a_{\text{lin}}(t)$ begynner å bli en "mindre god" tilnærmelse for $a(t)$. Modifiser videre en linje slik at du får plottet $v(t)$ i en annen figur.

e) Ekstra: Hvor høyt, h_f, kommer raketten i løpet av dette første oppskytingstrinnet? Raketten trekkes mot jorda med gravitasjonskraften

$$F_G = \frac{GMm}{r^2},$$

der G er gravitasjonskonstanten, M er jordmassen, m er rakettmassen og r er avstanden mellom raketten og jordas sentrum. Anta at jorda er kuleformet med radius $R = 6.37 \cdot 10^3$ km. Hvis du har regnet riktig, har du kommet fram til at h_f er i underkant av 60 km. Bruk disse verdiene til å anslå hvor stor feil du har gjort underveis i dine regninger ved å bruke den konstante verdien 9.81 m/s^2 for tyngdens akselerasjon.

Oppgave 4: Tyngdepunkt



a) En tynn, jevntykk bøyle er en del av en sirkel og har sektorvinkel 2α, som vist i figuren. Sirkelradien er R. Vis at tyngdepunktet er

$$X = R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Hva blir resultatet for $\alpha = \pi$ og $\alpha \to 0$? Er svarene rimelige?

b) Bøylen erstattes av en sirkelsektor (dvs ei tynn, jevntykk skive) med samme åpningsvinkel 2α og radius R. Vis at tyngdepunktet er

$$X = \frac{2}{3}R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Hva blir resultatet for $\alpha = \pi$ og $\alpha \to 0$? Er svarene rimelige?