FY1001/TFY4109/TFY4145. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2015.
Løsningsforslag til øving 5.

Oppgave 1.

a) $I_0 = MR^2/2 = 500 \cdot 0.5^2/2 = 500/8 = 62.5$ kg m^2. Riktig svar: A.

b) 60 sekunder pr minutt og 2500 omløp pr minutt gir $T = 60/2500 = 0.024$ s = 24 ms. Riktig svar: C.

c) $\omega = 2\pi/T = 2\pi/0.024 = 262$ s^{-1}. Riktig svar: D.

d) $K = I_0\omega^2/2 = 62.5 \cdot 262^2/2 = 2.14$ MJ, som omregnet (1 kWh = 3.6 MJ) gir 0.59 kWh. Riktig svar: B.

e) $L = I_0\omega = 62.5 \cdot 262 = 16.4 \cdot 10^3$ Js. Riktig svar: D.

Oppgave 2.

a) Bordtennisball: $m = 2.7$ g = 0.0027 kg og $r = 20$ mm = 0.020 m. Dermed: $I_0 = 2mr^2/3 = 7.2 \cdot 10^{-7}$ kg m^2. Riktig svar: B.

b) Kule, friidrett, menn: $M = 7.26$ kg og $R = 60$ mm = 0.060 m. (Helt presist: Mellom 55 og 65 mm.) Dermed: $I_0 = 2MR^2/5 = 0.010$ kg m^2. Riktig svar: D.

Oppgave 3

a) Mhp aksen gjennom A (normalt papirplanet) har staven et treghetsmoment $MD^2/3$ (se forelesningene). En ekstra (punkt-)masse m i avstand d gir ganske enkelt et ekstra bidrag md^2, slik at

$$I = \frac{1}{3}MD^2 + md^2.$$

Riktig svar: A.

b) Før sammenstøtet mellom kule og stav er det bare kula som har impuls, slik at

$$\boldsymbol{p}_i = mv\hat{x}.$$

Riktig svar: B.

c) Før sammenstøtet er det bare kula som har dreieimpuls mhp A, dens *banedreieimpuls* mhp A er

$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_i = -d\hat{y} \times mv\hat{x} = mvd\hat{z}.$$

Med impuls i x-retning bidrar ikke x-komponenten av $\boldsymbol{r}$ til dreieimpulsen. Riktig svar: B.

d) Tyngdekraften som virker på staven og kula i sammenstøtet har ingen arm mhp A. En eventuell kraft fra akslingen i sammenstøtet angriper staven i A og har dermed heller ingen arm mhp A. Da er det ikke noe ytre dreiemoment mhp A som påvirker systemet, og dreieimpulsen mhp A er bevart: $\boldsymbol{L}_f = \boldsymbol{L}_i = mvd\hat{z}$. Riktig svar: B.

e) Stav pluss kule er et stivt legeme med treghetsmoment I og dreieimpuls mvd mhp A rett etter sammenstøtet. Systemet utfører ren rotasjon om A. Da har vi $L = I\omega$, slik at

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{L}}{I} = \frac{v/d}{1 + MD^2/3md^2}\,\hat{z}.$$

Alternativt uttrykt som alternativ D i oppgaveteksten. Riktig svar: D.

f) Like etter sammenstøtet har alle deler av staven, inklusive den "absorberte" kula, hastighet i positiv x-retning:

$$\boldsymbol{v}(y) = -\omega y\hat{x},$$

slik at $\boldsymbol{v} = 0$ ved A ($y = 0$) og $\boldsymbol{v} = \omega D\hat{x}$ helt nederst ($y = -D$). Gjennomsnittshastigheten for staven blir dermed $\omega D\hat{x}/2$ og dens impuls $M\omega D\hat{x}/2$. Til dette må vi huske å addere kulas impuls $m\omega d\hat{x}$. Følgelig:

$$\boldsymbol{p}_f = \left(\frac{1}{2}MD + md\right)\omega\hat{x}.$$

Innsetting for ω fra e) gir

$$\boldsymbol{p}_f = \frac{mv + MvD/2d}{1 + MD^2/3md^2}\,\hat{x}.$$

Siden vi skal sammenligne p_f med p_i, trekker vi ut $mv = p_i$ fra telleren og får

$$\boldsymbol{p}_f = \boldsymbol{p}_i\,\frac{1 + MD/2md}{1 + MD^2/3md^2}.$$

Riktig svar: A.

g) Her vil forholdet mellom leddene som adderes til 1 i teller og nevner avgjøre om det er p_f eller p_i som er størst:

$$\frac{MD/2md}{MD^2/3md^2} = \frac{3d}{2D}.$$

Dermed: Hvis $d = 2D/3$, er $p_f = p_i$. Treffer kula nøyaktig her, ønsker stavens øvre ende ikke å bevege seg i sammenstøtet, og vi har faktisk impulsbevarelse.
Hvis $d > 2D/3$: Kula treffer staven så langt ned at rotasjonsbevegelsen ville ha blitt slik at stavens øverste ende rett etter støtet ville ha beveget seg mot venstre. Men staven er festet i A og beveger seg ikke der. Dette må skyldes en kraft $\boldsymbol{F}$ fra akslingen på staven i A rettet mot høyre. Og et ytre kraftstøt $\boldsymbol{F}\cdot\Delta t$ rettet mot høyre vil som kjent gi en økning i systemets impuls i denne retningen. (Her er Δt sammenstøtets (korte) varighet.)
Tilsvarende: Hvis $d < 2D/3$, treffer kula staven så langt opp at øverste ende "prøver" å bevege seg mot høyre. En kraft fra akslingen rettet mot venstre forhindrer dette, og gir samtidig systemet en redusert impuls mot høyre.
(I det *videre forløpet*, når tyngdekraften får virke på systemet, med en arm mhp A som ikke er null, har vi selvsagt ikke impulsbevarelse - og heller ikke dreieimpulsbevarelse - men det var det ikke spørsmål om her.)

h) Kinetisk energi før støtet:

$$K_i = \frac{1}{2}mv^2.$$

Kinetisk energi rett etter støtet:

$$\begin{aligned}
K_f &= \frac{1}{2}m(\omega d)^2 + \frac{1}{2}\int_{\text{staven}} dm(\omega y)^2 \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2 d^2 + \frac{1}{2}\int_{-D}^{0} \frac{M dy}{D}\omega^2 y^2 \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2 d^2 + \frac{1}{6}MD^2\omega^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}md^2 + \frac{1}{6}MD^2\right)\frac{(v/d)^2}{(1+MD^2/3md^2)^2} \\
&= \ldots \\
&= \frac{K_i}{1+MD^2/3md^2}.
\end{aligned}$$

Dermed er endringen i kinetisk energi

$$\Delta K = K_f - K_i = -\frac{K_i}{1+3md^2/MD^2},$$

og relativ endring, i absoluttverdi, som i alternativ A i oppgaveteksten.

Hvis kula har mye større masse enn staven, $m \gg M$, er $\Delta K/K_i \simeq 0$. Det høres rimelig ut: Staven representerer kun en "ubetydelig hindring" for kula, som (rett etter støtet) fortsetter som om intet hadde hendt. Hvis kula derimot har mye mindre masse enn staven, $m \ll M$, blir $\Delta K/K_i \simeq -1 = -100\%$. Det høres også rimelig ut: Staven er så tung i forhold til kula at den henger praktisk talt i ro etter støtet. (Tenk bare på grensen $M \to \infty$; da er staven som en "massiv vegg", all bevegelse opphører, og hele den kinetiske energien er tapt som varme og eventuelt deformasjon av kule og stav.)

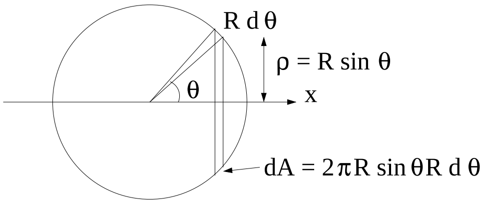
Oppgave 4

a) **C**. Bruk Steiners sats, $I_1 = I_2 = I_0 + Md^2$ med $d = R_1 = R_2$.

b) **C**. I luftlinje i nord-syd-retning er det ca 40 mil mellom Oslo og Trondheim, dvs ca $4 \cdot 10^5$ m. Dette blir bilimpulsens "arm" a. Bilen har masse omlag 1000 kg og hastighet østover ca 25 m/s. Dreieimpulsen mhp et sted i Oslo sentrum blir dermed $L = mva \sim 1000 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 10^5 = 10^{10}$ kg m^2/s.

c) **A**. Vi har $\tau = I_0\dot{\omega}$, N2 for rotasjon om akse gjennom slipesteinens tyngdepunkt. Her er $\tau = Sr = 20 \cdot 0.25 = 5.0$ i SI-enheter. Dessuten er $\dot{\omega} = 60/12 = 5.0$, også i SI-enheter. Dermed må I_0 være lik 1.0, i SI-enheten kg m^2.

Frivillig ekstraoppgave



Vi setter $dm = M \cdot dA/A$, med $A = 4\pi R^2$ = arealet av hele kuleskallet og $dA = 2\pi\rho \cdot Rd\theta = 2\pi R \sin\theta \cdot Rd\theta$ = arealet av en smal ring med omkrets $2\pi R \sin\theta$ og bredde $Rd\theta$. Her er θ vinkelen mellom (rotasjons-)aksen og linjen fra kuleskallets sentrum ut til den smale ringen, se figur. Dermed:

$$I_0 = \int_0^\pi (R\sin\theta)^2 \cdot M \cdot \frac{2\pi R^2 \sin\theta d\theta}{4\pi R^2} = \frac{1}{2} M R^2 \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta.$$

Vi bruker tipset gitt i oppgaven og finner

$$\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta) = |_0^\pi \left(\frac{\cos 3\theta}{12} - \frac{3\cos\theta}{4}\right) = \frac{4}{3},$$

slik at

$$I_0 = \frac{2}{3} M R^2.$$

Vi betrakter ei kompakt kule som mange tynne kuleskall utenpå hverandre, hver med treghetsmoment $dI = 2r^2 dm/3$, radius r, masse $dm = M \cdot dV/V$, der $V = 4\pi R^3/3$ er kulas totale volum, og $dV = 4\pi r^2 dr$ er volumet til et kuleskall med radius r og tykkelse dr. Dermed:

$$I_0 = \int dI = \int_0^R \frac{2}{3} r^2 \cdot M \cdot \frac{4\pi r^2 dr}{4\pi R^3/3} = \frac{2M}{R^3} \int_0^R r^4 dr = \frac{2}{5} M R^2.$$

Alternativ metode: La x-aksen være rotasjonsaksen og del opp kula i tynne skiver med tykkelse dx og radius $\sqrt{R^2 - x^2}$, og dermed volum $dV = dx \cdot \pi(R^2 - x^2)$ og masse $dm = M dV/V = M \cdot dx \cdot \pi(R^2 - x^2)/(4\pi R^3/3)$. Treghetsmomentet til ei slik skive er $dI = dm \cdot (R^2 - x^2)/2$, slik at kulas treghetsmoment blir

$$\begin{aligned}
I &= \int dI \\
&= \frac{1}{2} \int dm \cdot (R^2 - x^2) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^R \frac{M \cdot dx \cdot \pi(R^2 - x^2)}{4\pi R^3/3} \cdot (R^2 - x^2) \\
&= \frac{3M}{4R^3} \int_0^R (R^4 - 2R^2 x^2 + x^4) dx \\
&= \frac{2}{5} M R^2
\end{aligned}$$