**FY1001/TFY4145 Mekanisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2014.**

Løsningsforslag til øving 6

Vi utleder først ligningen som fastlegger vinkelen $\phi_r$, dvs overgangen fra ren rulling til sluring. N2 for rotasjon om CM, $fr = I_0\alpha$, gir $f = I_0\alpha/r = cMr^2(A/r)/r = cMA$. Vi setter dette inn for $f$ i ligningen fra N2 langs banen, $Mg\sin\phi_r - f = MA$ og løser mhp $A$:

$$Mg\sin\phi_r - cMA = MA \quad \Rightarrow \quad A = \frac{g\sin\phi_r}{c+1}.$$

Under ren rulling er mekanisk energi bevart. Anta at $V = 0$ ved $\phi = 0$. Da er

$$Mg(r+R) = Mg(r+R)\cos\phi_r + \frac{1}{2}(c+1)MV^2,$$

dvs

$$\frac{V^2}{r+R} = \frac{2g(1-\cos\phi_r)}{c+1}.$$

Dette uttrykket bruker vi i N2 normalt banen, kombinert med at $f = f\text{max} = \mu_s N$ ved overgangen til sluring:

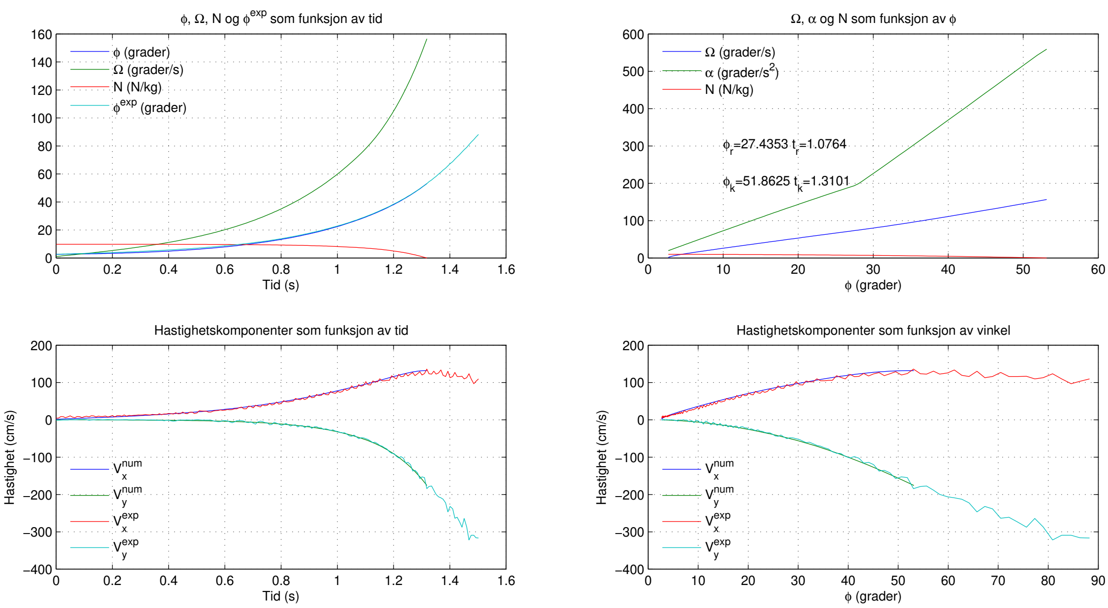
$$N = \frac{f}{\mu_s} = \frac{cMA}{\mu_s} = \frac{cMg\sin\phi_r}{\mu_s(c+1)} = Mg\cos\phi_r - M\frac{2g(1-\cos\phi_r)}{c+1}.$$

Divisjon med $Mg$, multiplikasjon med $c+1$ og litt rydding gir endelig

$$(c+3)\cos\phi_r - 2 = \frac{c}{\mu_s}\sin\phi_r.$$

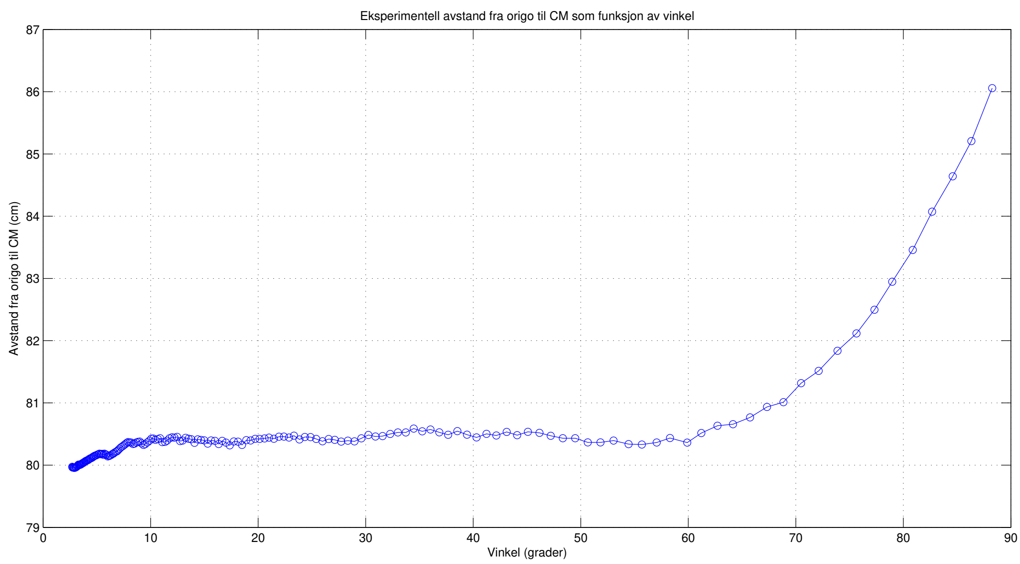
**Bordtennisballen**

Jeg har brukt $\mu_s = \mu_k = 0.25$, $R = 78.5$ cm og $V(t=0) = V(1) = 1.5$ cm/s. Figuren med 4 "subplott" blir da slik:

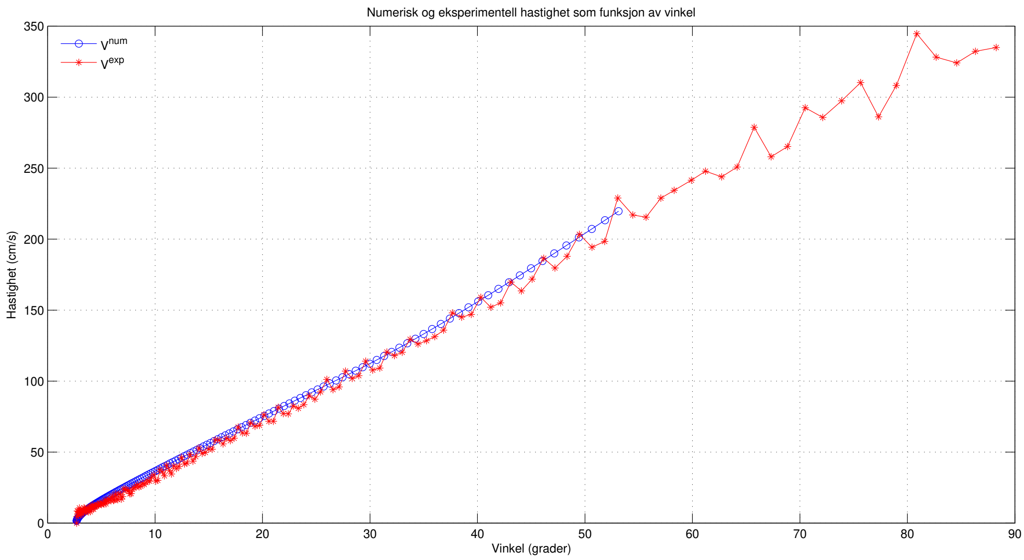


*Overgang fra ren rulling til sluring*
Den numeriske løsningen viser at sluring starter ved vinkelen $\phi_r^{\text{num}} = 27.4353°$. Innsetting av denne verdien, sammen med $\mu_s = 0.25$ og $c = 2/3$, i ligningen ovenfor gir verdiene 1.254 og 1.229 for hhv venstre og høyre side av ligningen. Er dette tilstrekkelig samsvar til at vi kan slå fast at numerikken fungerer godt? I det aktuelle vinkelområdet mellom 0 og 90 grader er venstre side (VS) av ligningen for $\phi_r$ en monotont voksende funksjon, mens høyre side (HS) er en monotont avtagende funksjon. Vi må derfor forvente at VS er større enn HS, fordi ved den numeriske $\phi_r^{\text{num}}$ *har* vi fortsatt ren rulling, mens ved $\phi_r^{\text{num}} + \Delta\phi$ har vi *ikke* lenger ren rulling. Vi ser at VS er større enn HS ved $\phi_r^{\text{num}}$. En utskrift av $\phi(jrulling + 1)$, dvs neste vinkelverdi, viser at denne er 0.4895 radianer, dvs 28.046 grader, og innsetting av denne verdien gir VS = 1.236 og HS = 1.254. Med andre ord, de numeriske beregningene gir en overgang til ren rulling mellom $\phi(jrulling)$ og $\phi(jrulling + 1)$, som de skal. Numerikken fungerer tilfredsstillende!

*Overgang til skrått kast*
Numerisk mister bordtennisballen kontakten med underlaget ved $\phi_k^{\text{num}} = 51.8625°$. Her *har* vi fortsatt kontakt, så vi mister egentlig kontakten ved en litt større vinkel. Her er vinkelendringen pr tidssteg ca 0.6°, så $\phi_k$ ligger et sted mellom 51.9 og 52.5°.
Det kan være flere gode strategier for å bestemme den tilsvarende eksperimentelle vinkelen, $\phi_k^{\text{exp}}$. En av de mest nærliggende er å plotte avstanden fra origo som funksjon av vinkelen. Har legemet kontakt med underlaget, er denne avstanden konstant lik $R + r$. Når legemet mister kontakten med underlaget, vil avstanden fra origo bli større. I programmet regnes begge størrelser ut, som `reksp` og `phieksp`, og for bordtennisballen blir grafen seende slik ut:




Her er datapunktene fra fila bordtennisball.txt avmerket med sirkler. Vi ser at avstanden til origo er praktisk talt konstant for vinkler mellom 10 og 60°, og ved å forstørre dette området anslår vi på øyemål en avstand 80.4 cm. Med $r = 19$ mm har vi derfor brukt $R = 78.5$ cm i programmet. Vi noterer også at mellom 3 og 9° øker $R + r$ omtrent lineært, fra 80.0 til 80.4 cm. Dette betyr at kvartsirkelen er litt flatklemt på toppen, noe som vil gi en mindre eksperimentell baneakselerasjon $A$ enn om banen hadde vært perfekt sirkulær. Dette kommer tydelig fram i figuren nedenfor, der vi sammenligner eksperimentell og numerisk hastighet. Fra figuren ovenfor er det ikke mulig å si nøyaktig hvilket målepunkt som er det siste med kontakt til underlaget, men det er klart at $\phi_k^{\text{exp}}$ ligger omkring 60°. Det ser ut som om målingen ved 60° eller det foregående har blitt noe unøyaktig. Hvis punktet ved 60° er feil, tyder det på at $\phi_k^{\text{exp}}$ kan være noe mindre, kanskje ned mot 57 eller 58°. Hvis det foregående punktet er feil, tyder det på at $\phi_k^{\text{exp}}$ er ca 60°. Uansett ser det ut til at $\phi_k^{\text{exp}}$ er signifikant større enn den numeriske, som var omtrent 52°. Her kunne man kanskje oppnå noe bedre samsvar ved å justere litt på friksjonskoeffisienter og starthastighet. Men minst like viktig er nok effekten av luftmotstand, noe vi har neglisjert fullstendig i de numeriske beregningene. Luftmotstand reduserer akselerasjonen, hastigheten ved en gitt vinkel blir mindre, og bordtennisballen kan komme lenger før normalkraften $N$ reduseres til null. Dette kommer faktisk ganske tydelig fram hvis vi plotter numerisk og eksperimentell hastighet som funksjon av vinkelen:




Vi ser at $V^{\text{num}}$ (sirkler) gjennomgående er større enn $V^{\text{exp}}$ (stjerner), i samsvar med at luftmotstand ikke er helt uten betydning for bordtennisballen. Legg merke til "støyen" i $V^{\text{exp}}$. Dette er et generelt trekk ved numerisk derivasjon av eksperimentelle data: Selv om den eksperimentelle $\phi(t)$ ser glatt og pen ut, vil derivasjon blåse opp små "knekker" i kurven til tydelige "sprang" i den deriverte.

*Energibetraktninger*

Mekanisk energi er lik summen av potensiell og kinetisk energi, og kinetisk energi består av translasjons- og rotasjonsenergi:

$$E_{\text{mek}} = U + K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}}.$$

I programmet regnes alle aktuelle størrelser pr masseenhet, og mekanisk energi pr masseenhet blir

$$E_{\text{mek}} = gy + \frac{1}{2}\frac{I_0}{M}\omega^2 + \frac{1}{2}V^2.$$

Her er $I_0/M = cMr^2/M = cr^2$. Hvis vi har ren rulling, er $\omega = V/r$, og

$$E_{\text{mek}} = gy + \frac{1}{2}(c+1)V^2.$$

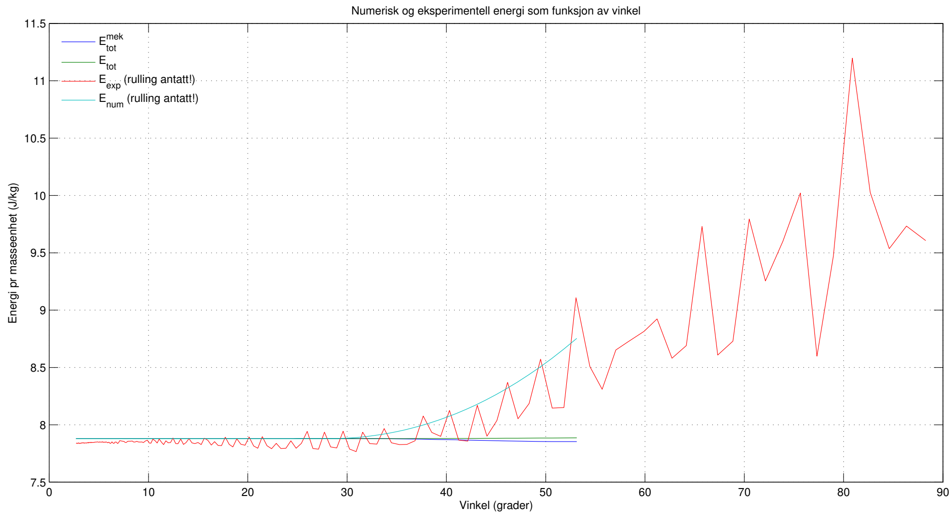
Hvis vi har sluring, er $V > \omega r$, og legemets kontaktpunkt mot underlaget har hastighet $v_{\text{rel}} = V - \omega r > 0$. I løpet av et tidsintervall $dt$ vil underlaget nå utføre et friksjonsarbeid

$$dW_f = \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{s} = -f v_{\text{rel}} dt$$

på det slurende legemet. Siden friksjonskraften $\boldsymbol{f}$ alltid er rettet mot relativhastigheten $\boldsymbol{v}_{\text{rel}}$, blir dette et *negativt* friksjonsarbeid, noe som bidrar til en *reduksjon* i legemets mekaniske energi. Den *totale* energien, dvs mekanisk energi pluss utført friksjonsarbeid, er imidlertid bevart, så hvis vi plotter

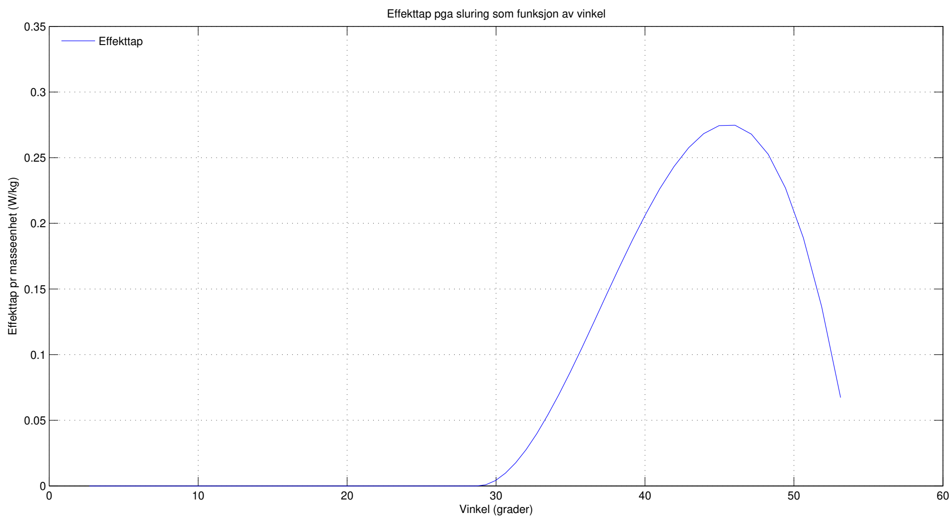
$$E = gy + \frac{1}{2}V^2 + \frac{1}{2}cr^2\omega^2 + \int_0^t f v_{\text{rel}} dt,$$

bør $E$ være konstant hele veien. Dette ser ut til å stemme bra. I figuren nedenfor er kurvene for total energi (grønn), total mekanisk energi (blå) og mekanisk energi med ren rulling antatt (lyseblå) sammenfallende fram til 28°, som de skal. Her starter sluringen, og mekanisk energi avtar mens mekanisk energi med ren rulling antatt vokser. Total energi (grønn kurve), med korrekt uttrykk for mekanisk energi og friksjonsarbeidet inkludert, forblir konstant.



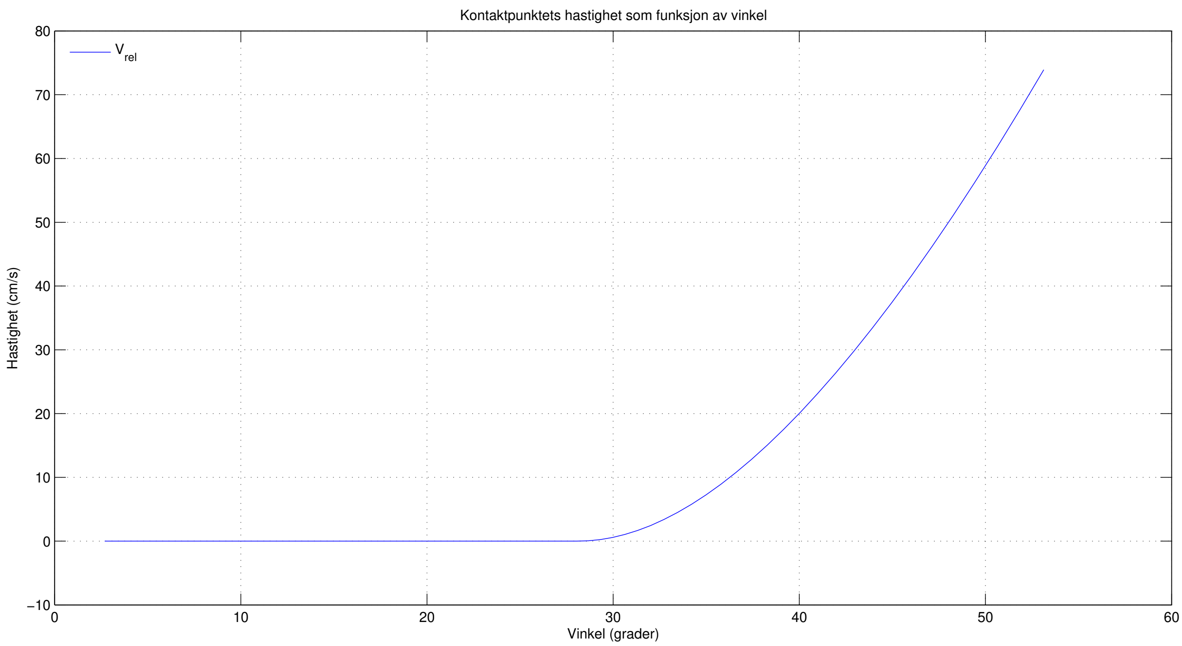

Friksjonsarbeidet, dvs forskjellen mellom grønn og blå kurve, er forholdsvis beskjedent. I følge våre beregninger her utgjør det i tallverdi ikke mer enn 0.0328 J/kg, dvs ca 89 $\mu$J dersom vi antar at bordtennisballen har en masse 2.7 g (som den visstnok skal ha). Forøvrig merker vi oss at støyen i numerisk bestemte eksperimentelle hastigheter selvsagt forplanter seg videre til den eksperimentelle mekaniske energien (rød kurve i figuren over).

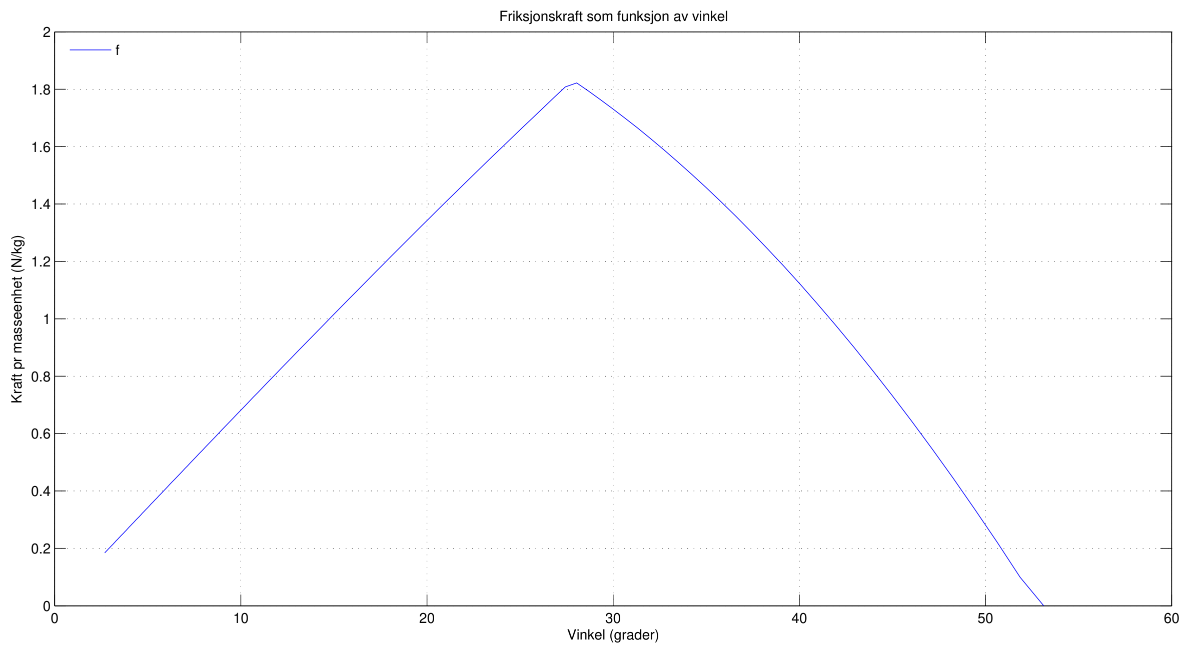
Vi kan plotte størrelsen $P_f = f v_{\mathrm{rel}}$, dvs effekttapet pr masseenhet pga sluring:




Vi noterer at effekttapet først øker, pga økende relativ hastighet $v_{\mathrm{rel}}$, for deretter å avta igjen, pga minkende normalkraft $n$, og dermed også minkende friksjonskraft $f = \mu_k n$. Maksimalt effekttap, ca 0.275 W/kg, har vi ved en vinkel ca 46°. For en bordtennisball på 2.7 g tilsvarer dette et maksimalt effekttap på ca 0.7 mW. Ikke rare greiene!

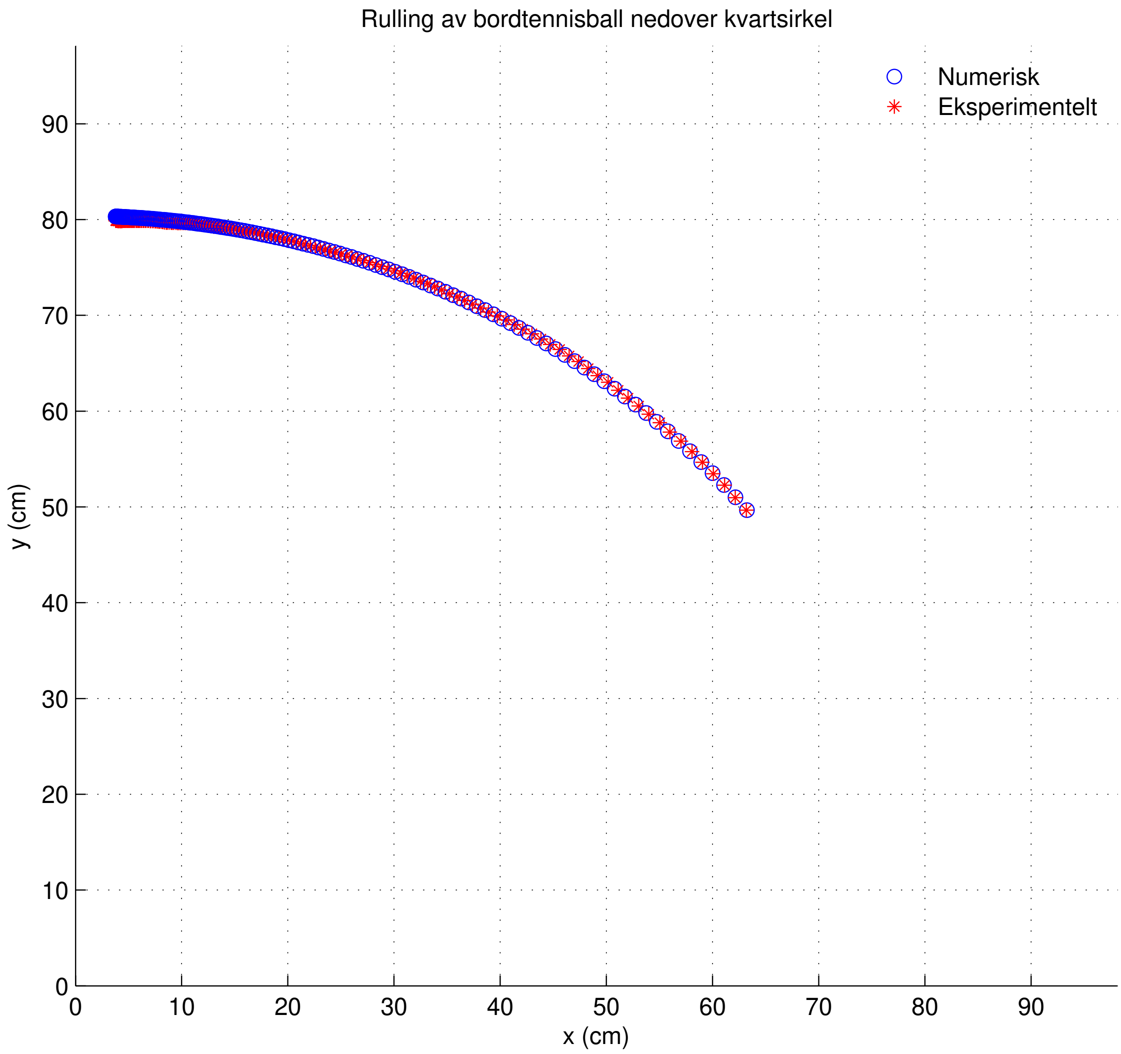
Vi tar med figurer for $v_{\mathrm{rel}}$ og $f$:




Friksjonskraften øker opp til maksimal verdi ved overgang til sluring. Deretter avtar den pga avtagende normalkraft.

Matlabprogrammet losning6.m som er lagt ut på hjemmesiden genererer alle disse figurene, pluss et par til. I Figur 2 vises en "animasjon" av bordtennisballens bevegelse fram til den mister kontakten med underlaget, eksperimentelt (røde stjerner) og numerisk (blå sirkler). Siden ingen avsatte punkter slettes underveis, inneholder sluttbildet alle de eksperimentelle dataene, samt de numeriske for tilsvarende tidspunkter:




Jeg overlater til den enkelte å prøve ut det utlagte programmet for de tre andre legemene, sylinder, volleyball og taperull.

Kommentar: Dette løsningsforslaget går selvsagt *langt* utover det som kreves for å få øvingen godkjent.

Helt til slutt: Mange takk til Geir Solem på Finmekanikkverkstedet som laget den fine kvartsirkelen, og Jonas Persson på Institutt for fysikk for produksjon av filmene og hjelp med programmet *tracker*, som ble brukt til å framskaffe eksperimentelle $t, x, y$ data. Se

`http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/`