Løsningsforslag, tentamen FY1001/TFY4145 torsdag 27. november 2014

1) Konstant $v = v_t$ betyr $a = 0$, dvs $F = 0$, dvs $mg = Dv_t^2$, dvs $v_t = \sqrt{mg/D} = \sqrt{0.400 \cdot 9.81/0.0115} = 18.5$ m/s. B.

2) Null nettokraft normalt skråplanet gir $N = mg\cos\theta$. Null nettokraft langs skråplanet gir $mg\sin\theta = f = \mu_k N$, dvs $\tan\theta = \mu_k = 0.4$ som gir $\theta = 22$ grader. C.

3) En ren figurbetraktning gir $D = L/3 + 2 \cdot (L/3) \cdot \cos\alpha$, der α er den søkte vinkelen. Innsetting av $D = 4$ og $L = 6$ gir $\cos\alpha = 1/2$, dvs $\alpha = 60$ grader. D.

4) En fotball er essensielt et kuleskall, med treghetsmoment $I_0 = (2/3)MR^2$. Fra oppgave 1 har vi $M = 400$ g og $R = 11$ cm, som gir $I_0 = (2/3) \cdot 0.4 \cdot 0.11^2 = 0.003$ kg m^2 = 3 g m^2. B.

5) Fire krefter virker på stigen: Mg, loddrett ned, angriper i massesenteret; N_1, horisontalt, normalkraft fra veggen på stigen; N_2, vertikalt opp, normalkraft fra gulvet på stigen; $f \le \mu_s N_2$, horisontalt (mot veggen), friksjonskraft fra gulvet på stigen. Minimal μ_s finnes ved å erstatte ulikheten med likhetstegn. Newtons 1. lov vertikalt: $Mg = N_2$. N1 horisontalt: $N_1 = \mu_s N_2$. N1 for rotasjon mhp kontaktpunktet mellom gulv og stige: $Mg \cdot (L/2) \cdot \cos\pi/4 = N_1 \cdot L \cdot \cos\pi/4$. Siste ligning her gir $Mg = 2N_1$, som kombinert med de to andre gir $\mu_s = 0.5$. C.

6) Her kan vi bruke at $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ hvis vi har kun en masse m festet i ei fjær, som igjen er festet i en vegg. Dersom vi lar $M \to \infty$, må det tilsvare situasjonen med veggen. Bare alternativ A stemmer med dette. A.

7) Total energi er $E = mv_0^2/2 = m\omega_0^2 L^2/2$, og denne er bevart. I en vilkårlig posisjon er hastigheten v og høyden er $h(\theta) = L(1 - \cos\theta)$. Dermed er $mv^2/2 + mgL(1 - \cos\theta) = m\omega_0^2 L^2/2$, som gir $v = \left[\omega_0^2 L^2 - 2gL(1 - \cos\theta)\right]^{1/2}$. B.

8) Baneakselerasjonen er $-g\sin\theta$, dvs $\Delta v/\Delta t = -g\sin\theta$. Da er det vel klart at riktig svar er B.

9) I avtar proporsjonalt med kvadratet av avstanden til sola. Dermed er $I_V/I_N = (4500/108)^2 = 1736$. C.

10) Med lik lengde har begge strenger lik bølgelengde for grunntonen ($2L$). Da er frekvensen omvendt proporsjonal med kvadratroten av strengens masse pr lengdeenhet (siden bølgehastigheten er det). Strengene har lik masse pr volumenhet. Det betyr at μ, massen pr lengdeenhet, er proporsjonal med d^2, der d er strengens diameter. Dermed har vi at $f \sim 1/d$, slik at $f_D/f_E = d_E/d_D$, dvs $d_E = d_D f_D/f_E = 0.026 \cdot 146.8/82.4 = 0.046$ in. B.

11) Her vil trykkbølgen ha nullpunkt (node) i den åpne enden og buk i den lukkede enden. (For utsvingsbølgen vil det være omvendt.) Uansett vil grunntonen ha en kvart bølgelengde på rørets lengde, slik at $\lambda = 4L = 320$ cm. C.

12) Hvis frekvensen inne i ambulansen er f og lydhastigheten er v, hører dere frekvensen $f_1 = vf/(v - v_S)$ når ambulansen (kilden, S, med hastighet v_S) kommer mot dere, og frekvensen $f_2 = vf/(v + v_S)$ når den kjører bort fra dere. Dette er to ligninger med to ukjente, f og v_S. Løsningen er, med $f_1 = 300$ Hz og $f_2 = 250$ Hz, $v_S/v = 1/11$ og $f = f_1(v - v_S)/v$. Med $v = 340$ m/s (det er en varm sommerdag, så lydhastigheten er forholdsvis stor) finner vi $v_S = 31$ m/s, dvs 111 km/h, og $f = 273$ Hz. A.

13) Konstruktiv interferens når $d\sin\theta = n\lambda$. Vi er ute etter θ for $n = 1$. Her er $\sin\theta_1 \simeq \tan\theta_1 = y_1/L$, med

$L = 1.0$ m. Formelen for konstruktiv interferens gir $\sin\theta_1 = \lambda/d = 0.0632$. Dermed: $y_1 = 0.0632$ m $= 6.3$ cm. B.

14) Tyngden til et vannvolum V med høyde h, tverrsnitt A og massetetthet ρ er $\rho g A h$. Trykkøkningen fra overflaten og ned til dybden h er dermed $\rho g h$, og med $\rho = 1000$, $g \simeq 10$ og $h = 10$ (alle i SI-enheter) blir $\Delta p = 10^5$ Pa, som er ca 1 atm. (Til eksamen er det ikke nødvendig å vite at et trykk på 1 atm tilsvarer ca 10^5 N/m^2 ($= 10^5$ Pa). Slike ting oppgis.) A.

15) Trykket der vannet skal strømme ut inne i sugepumpa kan vanskelig bli mindre enn null. Trykket ved brønnvannets overflate er ca 1 atm. Denne trykkforskjellen på 1 atm kan tilsvarer en vannsøyle på 10 meter. Dermed er riktig svar A.

16) Systemets totale energi er ganske enkelt summen av hvert enkelt fotons energi:

$$E = E_1 + E_2 = (200 + 100)\,\mathrm{MeV} = 300\,\mathrm{MeV}.$$

Foton nr 1 har impuls $p_1 = E_1/c = 200\,\mathrm{MeV}/c$ i x-retning ($\boldsymbol{p}_1 = p_1\hat{x}$). Foton nr 2 har impuls $p_2 = E_2/c = 100\,\mathrm{MeV}/c$ i y-retning ($\boldsymbol{p}_2 = p_2\hat{y}$). Systemets totale impuls er (vektor-)summen av hvert enkelt fotons impuls:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = 200\,\mathrm{MeV}/c\,\hat{x} + 100\,\mathrm{MeV}/c\,\hat{y}.$$

Absoluttverdi:

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{5}\cdot 100\,\mathrm{MeV}/c.$$

Retning (θ relativt positiv x-akse):

$$\tan\theta = \frac{p_2}{p_1} \quad\Rightarrow\quad \theta = \arctan 0.5 = 26.6^\circ.$$

For en enkelt partikkel med energi E og impuls p er massen:

$$m = \frac{1}{c^2}\sqrt{E^2 - (pc)^2} = \sqrt{300^2 - (\sqrt{5}\cdot 100)^2}\,\mathrm{MeV}/c^2 = 200\,\mathrm{MeV}/c^2.$$

Retning: Gitt ved vinkelen $\theta = 26.6^\circ$ funnet ovenfor.
Hastighet: Vi har $E = \gamma mc^2$, som med $\gamma^{-2} = 1 - v^2/c^2$ gir

$$v = c\sqrt{1 - (mc^2/E)^2} = c\sqrt{1 - (200/300)^2} = \sqrt{5}c/3 \simeq 0.745c.$$

17) Før kollisjonen har den ene partikkelen energi $E_1 = mc^2 + K_1$ mens den andre har energi mc^2. Total energi er derfor $E = K_1 + 2mc^2$, og denne energien er bevart. Før kollisjonen har den ene impuls $\boldsymbol{p}_1 = p_1\,\hat{x}$ mens den andre har null impuls. Total impuls, en bevart størrelse, er derfor $\boldsymbol{p} = p_1\,\hat{x}$. Etter kollisjonen har de to partiklene like stor energi E_2, slik at $K_1 + 2mc^2 = 2E_2$. De to partiklene har videre like stor impuls p_2 i absoluttverdi etter kollisjonen. Impulsbevarelse gir dermed

$$\begin{aligned} p_1 &= 2p_2\cos(\theta/2) \\ \Rightarrow 4\cos^2(\theta/2) &= (p_1/p_2)^2 \end{aligned}$$

For den innkommende partikkelen gjelder $p_1^2c^2 = E_1^2 - m^2c^4$, og for hver av partiklene etter kollisjonen gjelder $p_2^2c^2 = E_2^2 - m^2c^4$. Innsetting av $E_1 = K_1 + mc^2$ i den første av disse og innsetting av $E_2 = K_1/2 + mc^2$ i den andre gir

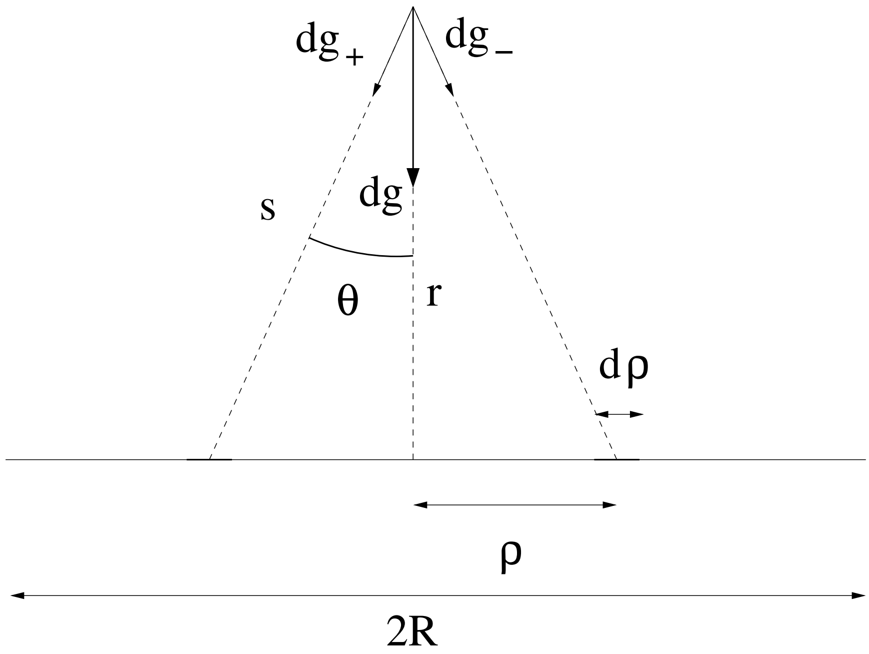
$$\begin{aligned} p_1^2c^2 &= (K_1 + mc^2)^2 - m^2c^4 = K_1(K_1 + 2mc^2) \\ p_2^2c^2 &= (K_1/2 + mc^2)^2 - m^2c^4 = K_1(K_1/4 + mc^2) \end{aligned}$$

Disse to ligningene gir, ved å dividere den første med den andre, og deretter kvadrere, et uttrykk for $(p_1/p_2)^2$, og dermed for $4\cos^2(\theta/2)$:

$$\begin{aligned} 4\cos^2(\theta/2) &= \frac{K_1 + 2mc^2}{K_1/4 + mc^2} = \frac{4K_1 + 8mc^2}{4mc^2 + K_1} \\ \Rightarrow \cos\theta &= 2\cos^2(\theta/2) - 1 = \frac{2K_1 + 4mc^2}{4mc^2 + K_1} - 1 \\ &= \frac{K_1}{4mc^2 + K_1} \end{aligned}$$

Med andre ord, $N = 4$ i det oppgitte uttrykket for $\cos\theta$.
I den ikke-relativistiske grensen $K_1 \ll mc^2$ blir $\cos\theta = 0$, dvs $\theta = \pi/2$. Det er et velkjent resultat for elastisk kollisjon mellom to legemer i newton-mekanikk.
I den sterkt relativistiske grensen $K_1 \gg mc^2$ blir $\cos\theta = 1$, dvs $\theta = 0$. Partiklene spres i liten grad ut mot siden og fortsetter essensielt rett fram! Dette ble verifisert eksperimentelt av F. C. Champion i 1932 (Proc. Roy. Soc. A **136**, 630 (1932); elastiske kollisjoner mellom innkommende elektroner med høy energi – hastigheter opp mot $0.94c$ – og elektronene i atomer i lufta i et tåkekammer).

18) Figuren nedenfor viser den skiveformede planeten sett fra siden:



Av symmetrigrunner må $\boldsymbol{g}$ på skivens akse peke mot skivens massesenter. I figuren er bidraget dg fra en ring med radius ρ og bredde $d\rho$ illustrert. Alle deler av denne ringen er i samme avstand $s = \sqrt{r^2 + \rho^2}$ fra posisjonen r hvor vi skal bestemme feltet. Ringen har areal $dA = 2\pi\rho\, d\rho$, og dermed masse $dm = M\, dA/A = M \cdot 2\pi\rho\, d\rho/\pi R^2$. Horisontale komponenter av $\boldsymbol{g}$ kansellerer. Vertikalkomponenten finner vi ved å multiplisere med $\cos\theta = r/s$. Dermed:

$$dg = \frac{G\, dm \cos\theta}{s^2} = \frac{G\, M \cdot 2\pi\rho\, d\rho \cdot r/s}{\pi R^2 \cdot s^2} = \frac{2GMr}{R^2} \cdot \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Integralet over ρ fra 0 til R gir:

$$g = \int dg = \frac{2GMr}{R^2} \int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{2GMr}{R^2} \Big|_0^R \left(-\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + r^2}} \right) = \frac{2GM}{R^2} \left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}} \right).$$

Langt unna planeten, $r \gg R$, kan vi med god tilnærmelse skrive

$$1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/r^2}} \simeq 1 - \left(1 - \frac{R^2}{2r^2}\right) = \frac{R^2}{2r^2},$$

slik at

$$g(r) \simeq \frac{GM}{r^2}.$$

Og slik må det være: Veldig langt unna vil skiva se ut som en punktmasse i origo, og som kjent vil en punktmasse M i origo gi opphav til gravitasjonsfeltet GM/r^2 i en avstand r.

Mer overraskende er trolig resultatet for $r \to 0$, dvs meget nær skiva. Da blir feltet ganske enkelt

$$g \simeq \frac{2GM}{R^2},$$

dvs *konstant*, og uavhengig av avstanden r! Tilsvarende resultat vil du finne for det *elektriske* feltet fra en uniformt ladet sirkulær skive, se Elmag etter jul.