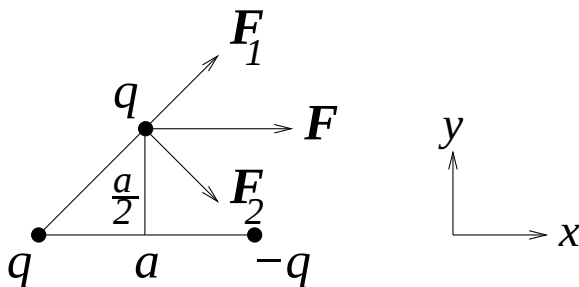


Løsningsforslag til øving 1

Veiledning mandag 18. august

Aller først et par kommentarer angående notasjon: Mens vektorer på tavla blir angitt med en pil over symbolet, brukes typisk **fete** symboler i trykte notater, som her. Det betyr at **$\mathbf{F}$** angir vektoren (f.eks. en kraft), og da både dens størrelse F og retning. Enhetsvektorer, dvs vektorer med lengde 1, angis med en $\hat{}$ over symbolet. Da har vi f.eks. sammenhengene **$\mathbf{F} = |\mathbf{F}|\hat{\mathbf{F}} = F\hat{\mathbf{F}}$** . Videre vil vi skrive de ulike *komponentene* av en vektor med en senket indeks, f.eks. F_x for x -komponenten av **$\mathbf{F}$** . Vi skal altså ikke bruke notasjonen $F_x = dF/dx$, slik dere antagelig gjorde i Matematikk 2.

Oppgave 1



Dersom den tredje ladningen skal ligge like langt fra de to andre, må den ligge på linjen som halverer og står vinkelrett på forbindelseslinjen mellom disse. Pytagoras gir da en avstand $\sqrt{(a/\sqrt{2})^2 - (a/2)^2} = a/2$ fra nevnte forbindelseslinje til den tredje ladningen.

Kraften **$\mathbf{F}_1$** mellom q og q er frastøtende, mens **$\mathbf{F}_2$** mellom $-q$ og q er tiltrekkende. I absoluttverdi må disse kreftene være like store:

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(a/\sqrt{2})^2} = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 a^2}$$

Av figuren finner vi at **$\mathbf{F}_1$** og **$\mathbf{F}_2$** har like store x -komponenter (slik koordinatsystemet er valgt her), men motsatt rettede y -komponenter. Dermed blir den resulterende kraften

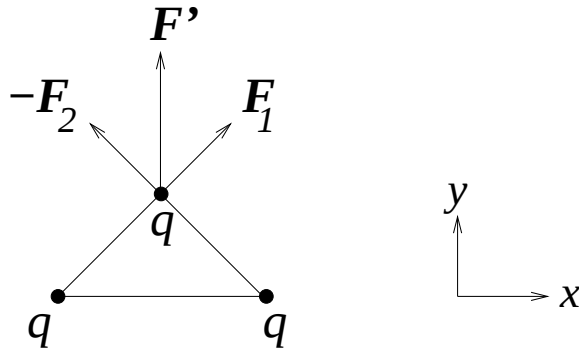
$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (F_{1x} + F_{2x})\hat{x} \\ &= 2F_{1x}\hat{x} \\ &= 2F_1 \cos \frac{\pi}{4} \hat{x} \\ &= \frac{q^2}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2} \hat{x} \end{aligned}$$

Her angir $\hat{x}$ en enhetsvektor i x -retning.

Med $q = e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ og $a = 5 \text{ \AA} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ får vi

$$F = \frac{(1.6 \cdot 10^{-19})^2 \text{C}^2}{\sqrt{2} \pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \text{C}^2/\text{Nm}^2 \cdot (5 \cdot 10^{-10})^2 \text{m}^2} \simeq 2.6 \cdot 10^{-9} \text{N} = 2.6 \text{ nN}$$

Dersom $-q \rightarrow q$, virker det to frastøtende krefter på den tredje ladningen:



Vi ser av figuren at nettokraften F' har retning langs y -aksen, og ettersom delkreftene har like store x - og y -komponenter (i absoluttverdi), må absoluttverdien av nettokraften være den samme. Altså:

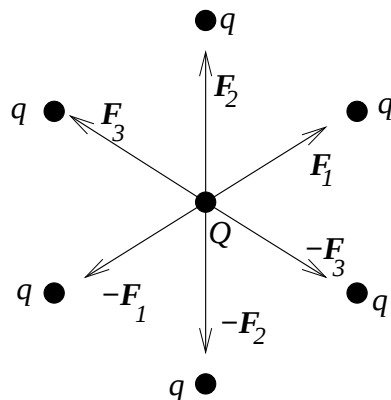
$$\mathbf{F}' = F' \hat{y} = F \hat{y} = \frac{q^2}{\sqrt{2} \pi \epsilon_0 a^2} \hat{y}$$

Kommentar: Dette var en meget enkel oppgave, trolig enklere enn mye dere allerede har støtt på i 2/3FY. Ikke desto mindre illustrerer den de grunnleggende elementer i elektrostatikken:

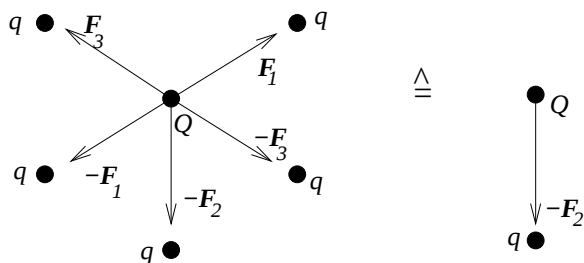
- Elektriske ladninger påvirker hverandre (“vekselvirker”) med krefter ifølge Coulombs lov.
- Krefter, enten de er elektriske eller av andre slag, er *vektorer*.
- For elektriske krefter (og andre krefter, for den saks skyld) gjelder *superposisjonsprinsippet*: Nettokraften på en ladning finner vi ved å summere opp enkeltkreftene som virker på den. For all del, ikke glem at det da er snakk om en sum av vektorer!

Oppgave 2

a) På grunn av symmetrien i problemet er det vel innlysende at testladningen Q blir utsatt for null nettokraft, idet kreftene fra to og to ladninger kansellerer hverandre:



b) Vi fjerner en av ladningene, f.eks. den “øverste”:



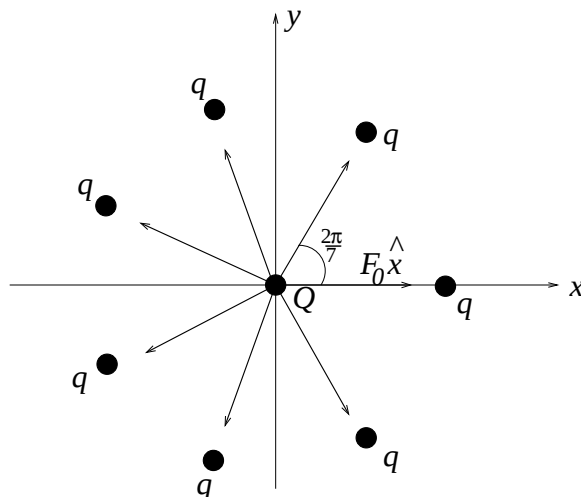
Det er da umiddelbart klart at nettokraften på Q blir lik kraften fra den ladningen vi fjernet, med motsatt fortegn, altså $-\mathbf{F}_2$.

Vi har her brukt *superposisjonsprinsippet*. Matematisk kunne vi f.eks. formulere løsningen slik: La $\sum_{(6)} \mathbf{F}_i$ angi nettokraften med alle 6 ladningene til stede og $\sum_{(5)} \mathbf{F}_i$ nettokraften etter vi har fjernet ladningen som påvirket Q med kraften $\mathbf{F}_2$. Da er

$$\sum_{(5)} \mathbf{F}_i = \sum_{(6)} \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_2 = 0 - \mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_2$$

c) Også med et odde antall q -ladninger, f.eks. 7, må nettokraften på testladningen Q i sentrum bli lik null. Anta at nettokraften *ikke* var null. En dreining av systemet på $360/7^\circ$ i papiplanet ville da medføre at nettokraften endret retning. Men systemet er uendret som følge av en slik dreining, så kraften på Q kan heller ikke ha endret seg og må følgelig være null.

Hvis noen mot formodning ikke er overbevist, er det jo bare å regne ut nettokraften. Legg Q i origo og (f.eks.) den ene q på x -aksen:



Nettokraften på Q blir da:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= F_x \hat{x} + F_y \hat{y} \\
 &= F_0 (1 + 2 \cos 2\pi/7 + 2 \cos 4\pi/7 + 2 \cos 6\pi/7) \hat{x} + \\
 &\quad F_0 (0 + \sin 2\pi/7 + \sin(-2\pi/7) + \sin 4\pi/7 + \sin(-4\pi/7) + \sin 6\pi/7 + \sin(-6\pi/7)) \hat{y} \\
 &= F_0 (1 + 1.247 - 0.445 - 1.802) \hat{x} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Her har vi satt absoluttverdien av kraften mellom q og Q lik F_0 og benyttet at $\cos(-x) = \cos x$ og $\sin(-x) = -\sin x$.

Resultatet av å fjerne en av q -ladningene blir selvsagt det samme som i punkt b .

Oppgave 3

Fluoridionet F^- har ett ekstra elektron og derved ladning $-e$. Massen er $(19 \text{ g/mol}) / (6.02 \cdot 10^{23} \text{ ioner/mol}) = 3.16 \cdot 10^{-23} \text{ g/ion} = 3.16 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$. Tyngdekraften balanseres akkurat av den elektriske kraften når $mg = eE$, som gir den elektriske feltstyrken

$$E = mg/e = (3.16 \cdot 10^{-26} \cdot 9.82 / 1.6 \cdot 10^{-19}) \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 / \text{C} = 1.9 \cdot 10^{-6} \text{ N/C}$$

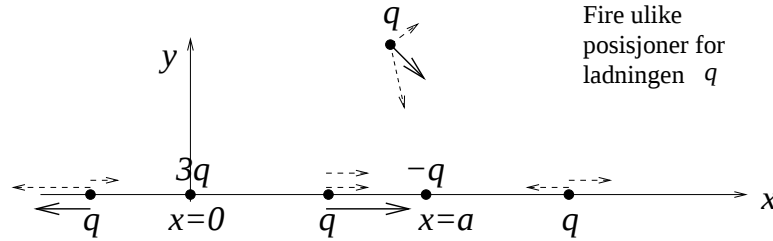
Tyngdekraften $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ peker nedover. For å balansere denne, må da den elektriske kraften $\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -e\mathbf{E}$ peke oppover, dvs $\mathbf{E}$ må peke nedover.

Det andre fluoridionet genererer et elektrisk felt $E(r) = e/4\pi\epsilon_0 r^2$ ifølge Coulombs lov. Vi løser mhp r :

$$r = \sqrt{\frac{e}{4\pi\epsilon_0 E}} = \sqrt{9 \cdot 10^9 \frac{1.6 \cdot 10^{-19}}{1.9 \cdot 10^{-6}}} \text{ m} = 0.027 \text{ m} = 2.7 \text{ cm}$$

Dette er en ganske lang avstand sett fra et fluoridions side. Det er f.eks. mye mer enn ionets utstrekning, som betyr at det var helt i orden å betrakte det som en punktpartikkel ved beregningen av r .

Oppgave 4



a) Punktladningen q er i likevekt dersom kraften på den er lik null. Her virker det to krefter, en frastøtende fra $3q$ og en tiltrekkende fra $-q$, og disse to kan bare kansellere hverandre dersom de har eksakt motsatt retning. Det er ikke mulig dersom q er plassert utenfor x -aksen, f.eks. som i figuren over. (Her er de to enkeltkomponentene av kraften angitt med stiplede piler og totalkraften med heltrukken pil.) Derfor må eventuelle likevektsposisjoner være på x -aksen.

b) Vi har fått oppgitt at det er *en* likevektsposisjon x_0 for q på x -aksen. Vi kan ikke ha x_0 mellom 0 og a , for på dette intervallet peker de to kraftkomponentene i samme retning. Vi kan heller ikke ha x_0 til venstre for $x = 0$, for da er avstanden mellom q og $3q$ alltid mindre enn avstanden mellom q og $-q$, og følgelig den frastøtende kraften $3q^2/4\pi\epsilon_0 x_0^2$ alltid større enn den tiltrekkende kraften $q^2/4\pi\epsilon_0 (a - x_0)^2$. Altså må $x_0 > a$. Vi bestemmer x_0 ved å sette total kraft lik null:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 x_0^2} \hat{x} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (x_0 - a)^2} \hat{x} \\ \Rightarrow \frac{3}{x_0^2} &= \frac{1}{(x_0 - a)^2} \\ \Rightarrow 3x_0^2 - 6ax_0 + 3a^2 &= x_0^2 \\ \Rightarrow 2x_0^2 - 6ax_0 + 3a^2 &= 0 \\ \Rightarrow x_0 &= \frac{6a}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{36a^2 - 24a^2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} a \simeq 2.37a \end{aligned}$$

Da forutsetningen var $x_0 > a$, er løsningen med negativt fortegn foran kvadratroten ikke en aktuell løsning. (Den tilsvarer $x \simeq 0.63a$, hvor begge kraftkomponenter er like store og har *samme* retning.)

Stabiliteten av likevektsposisjonen x_0 bestemmes kanskje enklest ved å se på nettokraften når $x \gg x_0$. Da “ser” punktladningen q tilnærmet en punktladning $3q - q = 2q$ og må følgelig erfare en netto frastøtende kraft. Vi vet at kraften er null bare i $x = x_0$. Da må kraften peke mot høyre for alle $x > x_0$, også for en liten forflytning til høyre for x_0 , mens den må peke mot venstre for en liten forflytning til venstre for x_0 . Dermed er likevekten ustabil mhp en forflytning langs x -aksen.

Alternativt, med litt regning: La oss først forenkle notasjonen ved å innføre funksjonen $f(x)$:

$$\mathbf{F}(x) = F(x)\hat{x} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(x - a)^2} \right) \hat{x} \equiv \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} f(x)\hat{x}$$

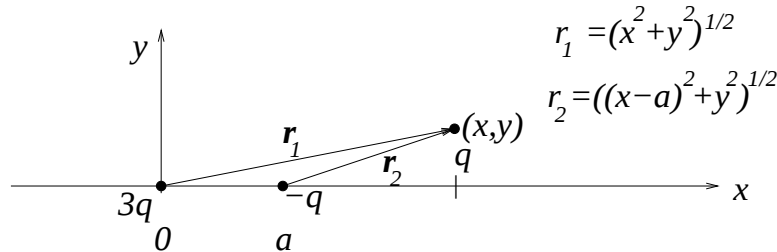
Deretter bestemmer vi df/dx i $x = x_0$:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} = -\frac{6}{x_0^3} + \frac{2}{(x_0 - a)^3} \simeq -\frac{6}{(2.37a)^3} + \frac{2}{(1.37a)^3} \simeq \frac{0.33}{a^3} > 0$$

Da $f(x_0) = 0$ og $f'(x_0) > 0$, er likevekten ustabil.

c) Vi tar utgangspunkt i nettokraften $\mathbf{F} = (q^2/4\pi\epsilon_0)\mathbf{f}$ der (se figur)

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \frac{3}{r_1^2}\hat{r}_1 - \frac{1}{r_2^2}\hat{r}_2 = \frac{3\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \\ &= \frac{3(x\hat{x} + y\hat{y})}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{(x-a)\hat{x} + y\hat{y}}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} \\ &= \left[\frac{3x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{x-a}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} \right] \hat{x} + \left[\frac{3y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{y}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} \right] \hat{y} \\ &= f_x\hat{x} + f_y\hat{y}\end{aligned}$$



Her har vi brukt at $\hat{r} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}| = \mathbf{r}/r$. For å vurdere stabilitet av likevektsposisjonen $(x_0, 0)$ med hensyn på en liten forflytning Δy i y -retning, må vi se på y -komponenten av kraften, f_y , i punktet $(x_0, \Delta y)$:

$$\begin{aligned}f_y(x_0, \Delta y) &= \Delta y \left[\frac{3}{(x_0^2 + (\Delta y)^2)^{3/2}} - \frac{1}{((x_0 - a)^2 + (\Delta y)^2)^{3/2}} \right] \\ &\simeq \Delta y \left[\frac{3}{x_0^3} - \frac{1}{(x_0 - a)^3} \right] \\ &= \Delta y \left[\frac{3}{(2.37a)^3} - \frac{1}{(1.37a)^3} \right] \\ &\simeq -\frac{0.17\Delta y}{a^3} < 0\end{aligned}$$

(Her har vi brukt at $|\Delta y| \ll x_0$ slik at leddene $(\Delta y)^2$ kunne neglisjeres i forhold til x_0^2 og $(x_0 - a)^2$ i de to nevnerne.)

Med andre ord: En liten *positiv* (evt negativ) forflytning Δy resulterer i at kraftens y -komponent blir *negativ* (evt positiv), dvs motsatt rettet forflytningen. Altså er likevekten stabil mhp en forflytning i y -retning.