Institutt for fysikk, NTNU
TFY4150/FY1303/SIF4012/MNFFY103 Elektrisitet og magnetisme
Høst 2003

Løsningsforslag til øving 14

Veiledning mandag 17. november

Oppgave 1

a) Sentripetalakselerasjonen er v_0^2/R mens Coulombkraften er $e^2/4\pi\varepsilon_0 R^2$. Newtons 2. lov gir da

$$m_e \frac{v_0^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e v_0^2}$$

Banedreieimpulsen til elektronet er

$$\boldsymbol{L}_0 = m_e\, \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}_0 = m_e R\, v_0\, \hat{z}$$

mens dets magnetiske dipolmoment er

$$\boldsymbol{m}_0 = I\boldsymbol{A} = -\frac{e}{2\pi R/v_0} \cdot \pi R^2\, \hat{z} = -\frac{1}{2} e v_0 R\, \hat{z} = -\frac{e}{2m_e}\boldsymbol{L}_0$$

b) Den valgte retningen på $\boldsymbol{B}$ fører til at den magnetiske kraften $\boldsymbol{F}_m = -e\, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ blir rettet innover mot kjernen, dvs i samme retning som den tiltrekkende Coulombkraften. Med uendret baneradius R bestemmes dermed hastigheten v av ligningen

$$m_e \frac{v^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + evB$$

Dette er en annengradsligning for v,

$$v^2 - \frac{eBR}{m_e}\, v - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R} = 0,$$

med løsning

$$v = \frac{eBR}{2m_e} + \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R} + \left(\frac{eBR}{2m_e}\right)^2}$$

(Løsningen med negativt fortegn foran kvadratroten er negativ og ikke aktuell.)
La oss gå tilbake og se på hastigheten uten magnetfelt:

$$v_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R}}$$

Vi ser umiddelbart at $v > v_0$. Det betyr at det magnetiske dipolmomentet

$$\boldsymbol{m} = -\frac{1}{2} e v R\, \hat{z}$$

er større enn før vi skrudde på magnetfeltet. Med andre ord, *endringen*

$$\Delta \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_0$$

er motsatt rettet det ytre magnetfeltet.
Hvis magnetfeltet istedet var rettet nedover, $\boldsymbol{B} = -B\ \hat{z}$, ville den magnetiske kraften bli rettet radielt *utover*, dvs i motsatt retning av Coulombkraften, slik at tilleggsleddet evB i bevegelsesligningen ville komme inn med motsatt fortegn. Dermed ville den nye hastigheten v ha blitt mindre enn v_0, og det magnetiske dipolmomentet også mindre enn før vi skrudde på magnetfeltet. Igjen: *Endringen* i magnetisk dipolmoment ville fremdeles ha vært motsatt rettet det ytre feltet.
Konklusjon: Et ytre magnetfelt påvirker elektronets banebevegelse i atomet på en slik måte at det *induserte* magnetiske dipolmomentet, dvs det magnetiske dipolmomentet knyttet til endringen i banebevegelsen, blir motsatt rettet det påtrykte feltet. Altså *diamagnetisme*.

Oppgave 2

Vi ser først på B_n, dvs komponenten av $\boldsymbol{B}$ som står normalt på det strømførende planet. Som gaussflate velger vi en fyrstikkeske, "symmetrisk omsluttende" et areal L^2 av det strømførende planet og med "høyde" h. Dvs, de to flatene som ligger parallelt med planet ligger på hver sin side i avstand $h/2$ fra planet. Når vi lar denne høyden h gå mot null, får vi ingen magnetisk fluks gjennom de fire sideflatene av gaussesken som står normalt på planet. Magnetfeltet like på oversiden er $\boldsymbol{B}$, så magnetisk fluks gjennom "topplokket" av esken blir $B_n \cdot L^2$. Vi lar altså L også være liten, men dog endelig. Dermed er magnetfeltet konstant over hele topplokket. På undersiden av flaten er magnetfeltet $\boldsymbol{B} + \Delta\boldsymbol{B}$. Dersom fluksen gjennom topplokket er positiv (dvs ut av gaussesken), må $\boldsymbol{B}$ på undersiden gi et like stort negativt bidrag, $-B_n \cdot L^2$. I tillegg får vi et positivt eller negativt bidrag $\Delta B_n \cdot L^2$ fra normalkomponenten ΔB_n til $\Delta\boldsymbol{B}$. Ifølge Gauss' lov skal netto fluks gjennom den lukkede flaten forsvinne. Dermed:

$$B_n \cdot L^2 - B_n \cdot L^2 + \Delta B_n \cdot L^2 = 0$$

Med andre ord: Normalkomponenten til $\Delta\boldsymbol{B}$ må være lik null. Dvs, normalkomponenten til $\boldsymbol{B}$ er kontinuerlig.

Deretter bruker vi Amperes lov på den nederste av de to amperekurvene i figuren i oppgaveteksten, nemlig den som omslutter et rektangel med flatenormal tangentielt til planet, men normalt til strømretningen. Vi lar lengden normalt til planet være h, som vi lar gå mot null, mens lengden L parallelt med planet lar vi være liten men endelig. Da får vi null bidrag til kurveintegralet i Amperes lov fra de to sidekantene med lengde h. Fra biten med lengde L på oversiden av flaten får vi bidraget $B_{t||} \cdot L$, der $B_{t||}$ er komponenten av $\boldsymbol{B}$ som er parallell til både planet og til strømretningen. (Som over antar vi L så liten at $\boldsymbol{B}$ er konstant over hele lengden L.) Fra biten med lengde L på undersiden av flaten får vi bidraget $-B_{t||} \cdot L$ fra $\boldsymbol{B}$ (motsatt fortegn av bidraget på oversiden fordi vi går motsatt vei) og dessuten bidraget $\Delta B_{t||} \cdot L$ fra $\Delta\boldsymbol{B}$. Tilsammen skal kurveintegralet rundt den lukkede kurven, dvs rektangelet, være lik μ_0 ganget med strømmen som kurven omslutter. Her er omsluttet strøm lik null, så vi får

$$B_{t||} \cdot L - B_{t||} \cdot L + \Delta B_{t||} \cdot L = 0$$

Med andre ord: Komponenten av $\Delta\boldsymbol{B}$ som er parallell til både planet og til strømretningen må være lik null. Dvs, $B_{t||}$ er kontinuerlig.

Endelig bruker vi Amperes lov på den øverste av de to amperekurvene i figuren i oppgaveteksten, nemlig den som omslutter et rektangel med flatenormal tangentielt til planet *og* til strømretningen. Nok en gang lar vi høyden h gå mot null slik at vi ikke får noe bidrag til kurveintegralet fra de to bitene normalt til planet. Bidraget fra lengden L over planet blir nå $B_{t\perp} \cdot L$, der $B_{t\perp}$ er komponenten av $\boldsymbol{B}$ tangentielt til planet og normalt til strømretningen. Hvis bidraget er positivt når vi integrerer som vist i figuren, dvs mot klokka, betyr det at $B_{t\perp}$ er positiv mot venstre i figuren. Bidraget fra lengden L under planet blir dermed $-B_{t\perp} \cdot L$ fra $\boldsymbol{B}$ (for her går vi motsatt vei) og $\Delta B_{t\perp} \cdot L$ fra $\Delta\boldsymbol{B}$. Her må vi passe på fortegnet: Vi integrerer fra venstre mot høyre, så hvis dette siste bidraget er positivt, betyr det at $\Delta\boldsymbol{B}$ peker mot høyre. Omsluttet strøm i dette tilfellet er ikke lik null. Pr lengdeenhet har vi en strøm i i det strømførende planet. På en lengde L har vi derfor en strøm iL. Amperes lov gir da:

$$B_{t\perp} \cdot L - B_{t\perp} \cdot L + \Delta B_{t\perp} \cdot L = \mu_0 iL$$

dvs

$$\Delta B_{t\perp} = \mu_0 i$$

Og dette er altså hele diskontinuiteten i magnetfeltet når vi krysser det strømførende planet. Vi har valgt omløpsretning for kurveintegralet i Amperes lov konsistent med positiv strøm ut av planet. Med andre ord, diskontinuiteten $\Delta\boldsymbol{B}$ blir en vektor mot høyre, som vist i figuren, med absoluttverdi $\mu_0 i$. Vi ser at med flatenormalen $\hat{n}$ pekende nedover og strømmen $\boldsymbol{i}$ ut av planet, får vi riktig retning på $\Delta\boldsymbol{B}$ ved å skrive

$$\Delta\boldsymbol{B} = \mu_0\, \boldsymbol{i} \times \hat{n}$$

som oppgitt i oppgaveteksten.

Legg merke til at hele diskontinuiteten $\Delta\boldsymbol{B}$ dannes av den strømmen som går i planet akkurat der vi krysser planet, eller om du vil, der vi krysser planet og et lite område omkring. Resten av verden, inklusive hele det strømførende planet, *unntatt* den lille biten omkring krysningspunktet, skaper et magnetfelt som er kontinuerlig gjennom krysningspunktet. Dette er fullstendig analogt i elektrostatikken: Der fant vi at det elektriske feltet var diskontinuerlig når vi krysset en flate med netto ladning σ pr flateenhet. Også der kan vi tenke oss at vi ser på en liten bit (skive) av flaten omkring krysningspunktet og lar det totale feltet være feltet fra denne biten pluss feltet fra resten av verden, inklusive resten av den ladete flaten. Diskontinuiteten i det elektriske feltet skyldes da nettopp den lille ladete skiva omkring krysningspunktet, mens feltet fra resten av verden er kontinuerlig idet vi krysser flaten. Husk imidlertid den lille men viktige forskjellen, nemlig at det er *normalkomponenten* til det elektriske feltet som er diskontinuerlig, mens det er *tangentialkomponenten* (og mer presist, den som står vinkelrett på strømretningen) til det magnetiske feltet som er diskontinuerlig.

Oppgave 3

Den *påtrykte* strømmen I genererer et H-felt $H = nI$ på langs overalt inne i spolen (pga Amperes lov for H). Dermed er det bare å benytte at

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) = \mu_r \mu_0 \boldsymbol{H}$$

for å bestemme de ulike størrelsene:

Inne i jernstaven:

$$H_j = nI = 2000 \text{ m}^{-1} \cdot 3 \text{ A} = 6000 \text{ A/m}$$

$$B_j = \mu_r \mu_0 H_j = 2000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ (Vs/Am)} \cdot 6000 \text{ A/m} = 15 \text{ T}$$

$$M_j = (\mu_r - 1) H_j = 1.2 \cdot 10^7 \text{ A/m}$$

I den luftfylte delen inne i spolen:

$$H_0 = H_j = 6000 \text{ A/m}$$

$$B_0 = \mu_0 H_0 = 7.5 \text{ mT}$$

$$M_0 = 0$$

Den beregnede magnetiseringen inne i jernstaven, $M_j = 1.2 \cdot 10^7$ A/m, er større enn metningsmagnetiseringen $M_s = 1.6 \cdot 10^6$ A/m, og derfor ikke fysisk mulig. Årsaken er at vi har brukt den lineære sammenhengen $B = \mu_r \mu_0 H$ mellom magnetfeltet B og feltet H fra den påtrykte strømmen. Her har vi imidlertid et så sterkt "ytre" felt H at en slik lineær sammenheng ikke lenger er gyldig. Samtlige magnetiske dipolmoment er rettet inn langs det påtrykte feltet allerede ved $H \simeq M_s/\mu_r = 800$ A/m. Ytterligere økning i H gir ingen økning i M.
Korrigert, maksimal verdi for B_j blir

$$B_j^{\text{korr}} = \mu_0 (H_j + M_s) = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \left(6000 + 1.6 \cdot 10^6\right) = 2 \text{ T}$$