

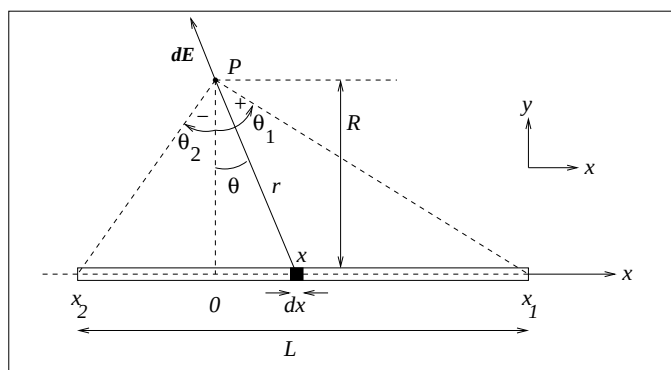
Løsningsforslag til øving 2

Veiledning mandag 25. august

Oppgave 1

a) Med “linjeladning” (dvs: ladning pr lengdeenhet) λ må ladningene dq og Q på henholdsvis en liten lengde dx og på hele staven bli

$$dq = \lambda dx \quad Q = \lambda L$$



b) Elektrisk felt fra lengdeelement dx i posisjon x :

$$d\mathbf{E} = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = A \frac{dx}{r^2} \hat{r}$$

der vi har innført $A = \lambda/4\pi\epsilon_0$. Fra figuren ser vi at denne vektoren har komponentene

$$dE_x = -dE \sin \theta = -\frac{A dx}{r^2} \sin \theta \quad dE_y = dE \cos \theta = \frac{A dx}{r^2} \cos \theta$$

Her har vi valgt $x = 0$ når $\theta = 0$, og fortegnet stemmer med oppgaveteksten, dvs $\theta > 0$ når $x > 0$.

Vi bruker tipset i oppgaven og uttrykker dx og $1/r^2$ ved vinkelen θ :

$$\begin{aligned} x &= R \tan \theta \Rightarrow dx = \frac{R d\theta}{\cos^2 \theta} \\ r &= \frac{R}{\cos \theta} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \theta}{R^2} \\ \Rightarrow \frac{dx}{r^2} &= \frac{d\theta}{R} \end{aligned}$$

De søkte komponentene E_x og E_y av feltet $\mathbf{E}$ i punktet P fra hele staven får vi ved å integrere dE_x og dE_y :

$$E_x = \int dE_x = -\frac{A}{R} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \sin \theta d\theta = \frac{A}{R} \left[\cos \theta \right]_{\theta_2}^{\theta_1} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

$$E_y = \int dE_y = \frac{A}{R} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \cos \theta d\theta = \frac{A}{R} \left[\sin \theta \right]_{\theta_2}^{\theta_1} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)$$

En uendelig lang stav oppnår vi ved å la $\theta_2 \rightarrow -\pi/2$ og $\theta_1 \rightarrow \pi/2$. Da blir $E_x = 0$ og følgelig

$$E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

Med andre ord: Feltet fra en uendelig lang linjeladning faller av som en over avstanden R .

c) 1: P like langt fra stavens to ender. Da er $\theta_1 = -\theta_2$ og følgelig $\cos \theta_1 - \cos \theta_2 = 0$ og $\sin \theta_1 - \sin \theta_2 = 2 \sin \theta_1 = L/\sqrt{R^2 + L^2/4}$. Dermed:

$$E_x = 0$$

$$E_y = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 R \sqrt{R^2 + L^2/4}}$$

2: P rett over stavens venstre ende. Da er $\theta_2 = 0$ og følgelig $\cos \theta_2 = 1$ og $\sin \theta_2 = 0$, mens $\cos \theta_1 = R/\sqrt{R^2 + L^2}$ og $\sin \theta_1 = L/\sqrt{R^2 + L^2}$. Dermed:

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2}} - 1 \right)$$

$$E_y = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 R \sqrt{R^2 + L^2}}$$

Langt unna staven, dvs $R \gg L$:

La oss se på E_y først. Vi kan i begge tilfeller erstatte kvadratroten med R , idet vi kan neglisjere henholdsvis $L^2/4$ og L^2 i forhold til R^2 . I begge posisjoner får vi da:

$$E_y \simeq \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Dette er feltet fra en punktladning Q i avstand R . Ikke uventet: Langt unna ser staven essensielt ut som en punktladning med total ladning $Q = \lambda L$.

Hva så med E_x i posisjon 2? I første omgang kan vi forsøke det samme her, dvs erstatte kvadratroten med R . Det gir $E_x = 0$, som i og for seg er riktig: x -komponenten går mot null når R går mot uendelig. Det samme kan vi forsåvidt si om E_y også, men det er ikke det som er interessant – de fleste effekter av det meste forsvinner dersom vi går langt nok unna. Derimot ønsker vi å vite *hvordan* de ulike størrelsene nærmer seg null når vi fjerner oss fra “kilden”. For E_y fikk vi svaret uten å anstrenge oss nevneverdig: $E_y \sim 1/R^2$.

For E_x i posisjon 2 trenger vi en litt bedre tilnærming for kvadratroten enn bare R , og det oppnår vi ved å ta med ett ledd til i Taylorutviklingen omkring $L/R = 0$:

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2}} = \left(1 + \frac{L^2}{R^2} \right)^{-1/2} \simeq 1 - \frac{L^2}{2R^2}$$

Det gir

$$E_x \simeq \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{L^2}{2R^2} - 1\right) = -\frac{\lambda L^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} = -\frac{L}{R} E_y$$

Vi merker oss her at E_x faller av som $1/R^3$ for store R og går derfor raskere mot null enn E_y . At $|E_x| \ll |E_y|$ for $R \gg L$ er vel ekstra tydelig i den siste omskrivingen i ligningen over. Spørsmålet “hva er $\mathbf{E}$ i posisjon 2 når $R \gg L$ ” kan derfor besvares med

$$\mathbf{E} \simeq \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{y}$$

Oppgave 2

a) Arealet av en tynn ring med radius R og bredde dR er $dA = 2\pi R dR$, slik at ladningen på en slik ring blir

$$dq = \sigma dA = 2\pi\sigma R dR$$

Arealet av skiva er $A = \pi R_0^2$, så skivas totale ladning blir

$$Q = \sigma A = \pi\sigma R_0^2$$

Skulle det være så galt at en ikke husker hva arealet av ei sirkelformet skive er, kan en selvsagt bestemme totalladningen Q ved å integrere dq :

$$Q = \int dq = \int_0^{R_0} 2\pi\sigma R dR = 2\pi\sigma \left| \frac{R^2}{2} \right|_0^{R_0} = \pi\sigma R_0^2$$

Og skulle det nå være så ekstra ille at en heller ikke husker hva omkretsen av en ring er, kan ladningen på den tynne ringen bestemmes ved å starte med en liten vinkel $d\phi$ og arealet avgrenset mellom R og $R + dR$. Dette arealet er $Rd\phi \cdot dR$, og integrerer vi dette uttrykket over ϕ fra 0 til 2π , får vi nettopp $2\pi R dR$ som blir arealet av den tynne ringen med radius R og bredde dR .

b) Vi deler skiva opp i ringer med bredde dR (se figur neste side). Alle punkter på ringen ligger i samme avstand r fra punktet på z -aksen. Diametralt motsatte punkter (evt arealer dA) fører til at x - og y -komponentene til feltet forsvinner (jfr eksemplet fra forelesningene). z -komponenten blir

$$dE_z = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta$$

Da r er konstant rundt hele ringen, kan en la dQ gjelde for hele ringen slik at

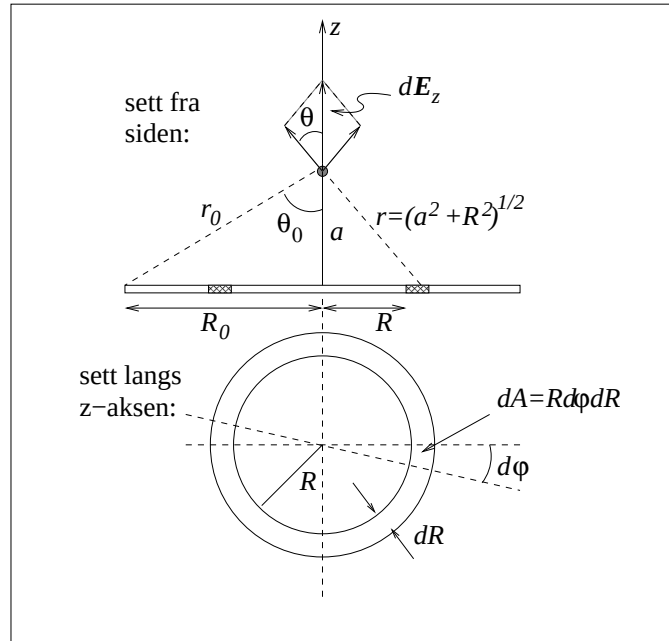
$$dQ = \sigma R dR \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi\sigma R dR$$

Dermed blir feltet fra hele skiva

$$E_z = \int dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{R_0} \frac{2\pi\sigma R a dR}{(a^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0} \left| \frac{(-1)}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right|_0^{R_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R_0^2}} \right)$$

Her har vi benyttet at

$$\cos \theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}$$



Et alternativ ville ha vært å bruke vinkelen θ som integrasjonsvariabel:

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{R}{a} \Rightarrow d(\tan \theta) = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{dR}{a} \\ r &= \frac{a}{\cos \theta} \\ \int_0^{R_0} \frac{R dR}{r^2} \cos \theta &= \int_0^{\theta_0} \left(\frac{\cos \theta}{a} \right)^2 a \tan \theta \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta} \cos \theta = \int_0^{\theta_0} \sin \theta d\theta \\ &= 1 - \cos \theta_0 = 1 - \frac{a}{r_0} = 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R_0^2}} \end{aligned}$$

der r_0 og θ_0 er definert i figuren over.

c) Når $a \gg R_0$, kunne en i første omgang (som i oppgave 1c) tenke seg å erstatte $\sqrt{a^2 + R_0^2}$ med a . Da får vi imidlertid bare den “trivielle” løsningen $E_z = 0$, mens vi er interessert i det dominerende ikke-forsvinnende bidraget til E_z . Det betyr at vi må rekkeutvikle $\sqrt{a^2 + R_0^2}$ og ta med så mange ledd at vi tilsammen ender opp med noe som er forskjellig fra null:

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{a}{a\sqrt{1 + \frac{R_0^2}{a^2}}} \right) \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \left(1 - \frac{R_0^2}{2a^2} + \dots \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\simeq \frac{\sigma R_0^2}{4\varepsilon_0 a^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \end{aligned}$$

Dette er feltet i avstand a fra en punktladning $Q = \sigma A$, der $A = \pi R_0^2$ er arealet av sirkelskiva. Som forventet: Er vi tilstrekkelig langt borte, ser vi ikke forskjell på ei ladet skive og en punktladning.

I den motsatte grensen, $a \ll R_0$, kan vi neglisjere leddet $a/\sqrt{a^2 + R_0^2}$ i forhold til 1. Vi får da

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Altså et uniformt elektrisk felt som verken avhenger av avstanden a eller skivas utstrekning R_0 . Dermed må dette være feltet utenfor et *uendelig stort plan* med ladningstetthet σ . Det er kanskje ikke umiddelbart opplagt at feltet da blir *uavhengig av avstanden* til planet, men slik er det altså! Selv om vi i praksis ikke har uendelig store flater til rådighet, er dette et viktig resultat: Med et stort ladet plan kan vi generere et tilnærmet uniformt elektrisk felt “i nærheten” av planet, og “ikke for nær” planets ytterkanter. Vi skal komme mye tilbake til dette resultatet senere i kurset.