Institutt for fysikk, NTNU
TFY4150/FY1303/SIF4012/MNFFY103 Elektrisitet og magnetisme
Høst 2003

Løsningsforslag til øving 4

Veiledning mandag 8. september

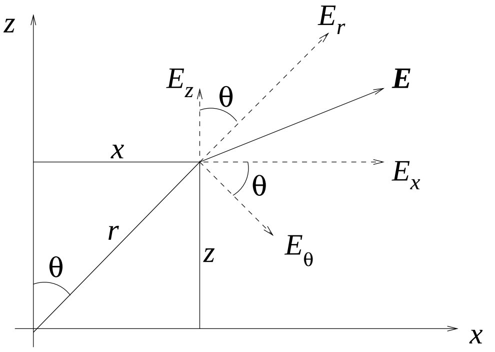
Oppgave 1

a) Her har vi oppgitt $V(r, \theta)$ og gradientoperatoren i kulekoordinater (og svaret for den saks skyld!), så det er bare å regne i vei (ingenting avhenger her av vinkelen ϕ, så leddet som inneholder $\partial/\partial\phi$ trenger vi ikke å bry oss med):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(r,\theta) &= -\nabla V(r,\theta) \\ &= -\left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ &= \hat{r}\frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3} + \hat{\theta}\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \end{aligned}$$

Vi merker oss at feltet fra en elektrisk dipol i stor avstand r fra dipolen faller av som $1/r^3$, altså raskere enn feltet fra en elektrisk "monopol", dvs en punktladning, som faller av som $1/r^2$. Feltbidragene fra de to ladningene med motsatt fortegn kansellerer hverandre delvis, men ikke fullstendig, ettersom retningen på de to bidragene til $\boldsymbol{E}$ alltid vil være litt forskjellig.

b) Av figuren nedenfor skulle det gå relativt klart fram hvordan den elektriske feltvektoren $\boldsymbol{E}$ enten kan dekomponeres i E_r og E_θ eller i E_x og E_z.



Både E_r og E_θ har komponenter i x-retning, og den totale x-komponenten av feltet må bli summen av disse to. Figurbetraktning gir:

$$\begin{aligned} E_x &= E_r\sin\theta + E_\theta\cos\theta \\ &= \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\sin\theta + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\cos\theta \\ &= \frac{3p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3pxz}{4\pi\varepsilon_0 r^5} \\
&= \frac{3pxz}{4\pi\varepsilon_0 \left(x^2+z^2\right)^{5/2}}
\end{aligned}
$$

Her har vi brukt $\sin\theta = x/r$, $\cos\theta = z/r$ og $r = (x^2+z^2)^{1/2}$.
Helt tilsvarende finner vi z-komponenten:

$$
\begin{aligned}
E_z &= E_r \cos\theta - E_\theta \sin\theta \\
&= \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\cos\theta - \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\sin\theta \\
&= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \\
&= \frac{\left(2z^2 - x^2\right)p}{4\pi\varepsilon_0 \left(x^2+z^2\right)^{5/2}}
\end{aligned}
$$

c) I kartesiske koordinater blir potensialet

$$
V = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p(z/r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{pz}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}
$$

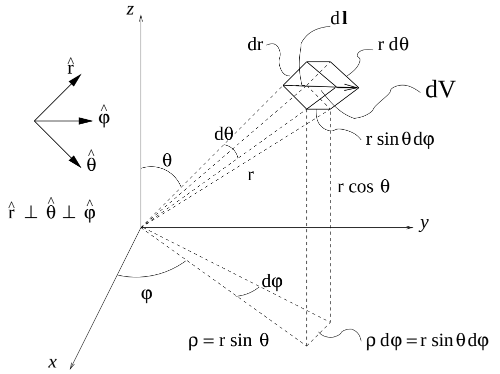
Med $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ får vi dermed

$$
\begin{aligned}
E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{3pzx}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+z^2\right)^{5/2}} \\
E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-p}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}} + \frac{3pz^2}{\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-p\left(x^2+z^2\right)+3pz^2}{\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}\right) \\
&= \frac{\left(2z^2-x^2\right)p}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}
\end{aligned}
$$

Det samme som vi fant under punkt b)!

Oppgave 2

a) Vi benytter oss av tipsene gitt i oppgaveteksten og tar utgangspunkt i følgende figur:



Merk, som nevnt i oppgaveteksten, at enhetsvektorene $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ og $\hat{\phi}$ egentlig burde ha vært tegnet inn *ved* volumelementet dV, ettersom de endrer retning etter hvor dV er lokalisert.
I figuren har vi tegnet inn et veielement $d\boldsymbol{l}$, som i kulekoordinater, i sin mest generelle form, består av en forflytning langs de tre ortogonale retningene spesifisert ved de ovenfor nevnte enhetsvektorer. Vi ser at en slik forflytning, fra punktet (r, θ, ϕ) til punktet $(r+dr, \theta+d\theta, \phi+d\phi)$, nettopp tilsvarer vektoren $d\boldsymbol{l}$ diagonalt gjennom volumelementet dV. Vi ser av figuren at denne vektoren har komponenter dr langs $\hat{r}$, $r\ d\theta$ langs $\hat{\theta}$ og $r \sin\theta\ d\phi$ langs $\hat{\phi}$. Altså:

$$d\boldsymbol{l} = dr\ \hat{r} + r\ d\theta\ \hat{\theta} + r \sin\theta\ d\phi\ \hat{\phi}$$

Legg merke til at mens komponentene til vektoren $d\boldsymbol{l}$ i kartesiske koordinater alltid er de samme (dx, dy, dz), avhenger to av dem av "hvor vi er" i kulekoordinater: Komponenten langs $\hat{\theta}$ er proporsjonal med r, dvs avstanden til origo, mens komponenten langs $\hat{\phi}$ i tillegg avhenger av vinkelen θ (dvs "breddegraden", hvis vi tenker oss z-aksen gjennom polene og ekvator i xy-planet). F.eks. er $dl_\phi = r \sin 0 = 0$ hvis vi starter i $\theta = 0$. Ikke urimelig: Står vi på en av polene, vil et lite skritt alltid bli i retning sørover (evt nordover), aldri østover eller vestover. Står vi på ekvator, derimot, dvs i $\theta = \pi/2$, blir $dl_\phi = r \sin \pi/2\ d\phi = r\ d\phi$. Ikke urimelig det heller: Her er øst, vest, sør og nord "likeverdige" retninger, så $dl_\theta = r\ d\theta$ og $dl_\phi = r\ d\phi$ bør her være "på samme form".

Fra figuren finner vi videre de tre flateelementene med flatenormaler henholdsvis langs $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ og $\hat{\phi}$:

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{A}_r &= (r\ d\theta)(r \sin\theta\ d\phi)\hat{r} \\
&= r^2 \sin\theta\ d\theta\ d\phi\ \hat{r} \\
d\boldsymbol{A}_\theta &= (dr)(r \sin\theta\ d\phi)\hat{\theta} \\
&= r\ dr \sin\theta\ d\phi\ \hat{\theta} \\
d\boldsymbol{A}_\phi &= (dr)(r\ d\theta)\hat{\phi} \\
&= r\ dr\ d\theta\ \hat{\phi}
\end{aligned}$$

Merk at disse tre er *vektorer*, med absoluttverdi lik arealet av flateelementet (f.eks. dA_r) og retning normalt på flaten (f.eks. $\hat{r}$). Vi trenger både *størrelse* og *orientering* for å gi en presis beskrivelse av en flate!

Endelig ser vi at volumelementet må bli

$$dV = (dr)(r\ d\theta)(r \sin\theta\ d\phi) = r^2\ dr \sin\theta\ d\theta\ d\phi$$

b) Volumet av ei kule med radius R finner vi ved å integrere volumelementet dV over alle verdier av θ og ϕ og r fra 0 til R:

$$\begin{aligned}
V(R) &= \int_{r<R} dV = \int_0^R r^2\ dr \int_0^\pi \sin\theta\ d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= \frac{1}{3} R^3 \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{3} R^3
\end{aligned}$$

Merk at når vi integrerer over ϕ fra 0 til 2π, må vi integrere over θ fra 0 til π, og ikke 2π, for å dekke alle romvinkler ("retninger").

Arealet av ei kuleflate med radius R finner vi ved å integrere flateelementet dA_r (altså absoluttverdien av $d\boldsymbol{A}_r$) over alle verdier av θ og ϕ med $r = R$:

$$A(R) = \int_{r=R} dA_r = R^2 \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = R^2 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi R^2$$

Oppgave 3

a) E. Bevaring av total energi, kinetisk og potensiell, gir

$$\begin{aligned} e\Delta V &= \frac{1}{2} m_e v^2 \\ \Rightarrow \quad v &= \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 25 \cdot 10^3}{9.11 \cdot 10^{-31}}} \text{ m/s} \simeq 9.4 \cdot 10^7 \text{ m/s} \end{aligned}$$

I denne oppgaven er det ikke nødvendig å bekymre seg over fortegnene på ladning og potensialforskjell, og heller ikke om det nå var katode eller anode som hadde høyest potensial. Det er *gitt* at kreftenes retning er slik at elektronet faktisk øker sin hastighet fra katode til skjerm, og det eneste vi da trenger å vite er at endring i kinetisk energi tilsvarer endring i potensiell energi. Vel, i tillegg må vi selvsagt vite at $T = mv^2/2$ og $U = qV$.
Et lite poeng til: Selv om en ikke husker nok til å gjøre denne utregningen, vil en titt på svaralternativene forhåpentlig kunne motivere en "educated guess": Hastigheter på 10^{15} m/s er over øvre grense satt av lyshastigheten $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, og derfor ikke mulig.

b) B. Oppnådd kinetisk energi for en partikkel som akselereres fra null starthastighet gjennom en potensialforskjell V blir, pga energibevarelse, lik partikkelens ladning multiplisert med potensialforskjellen: $T = \Delta U = q\Delta V$. Ettersom Be-kjernen har dobbelt så stor ladning som α-partikkelen, trengs bare halvparten så stor potensialforskjell for førstnevnte for å oppnå like stor kinetisk energi. Partikkelmassen er uten betydning her, men pga større masse, vil selvsagt Be-kjernen oppnå en lavere *hastighet* enn α-partikkelen. (Hvor mye mindre?)

c) D. Punkter med samme potensial tilhører samme ekvipotensialflate. For en ekvipotensialflate hadde vi $\Delta V = -\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$ for vilkårlig integrasjonsvei på ekvipotensialflaten. Det medfører at $\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$, og følgelig $\boldsymbol{E} \perp d\boldsymbol{l}$. Med andre ord, $\boldsymbol{E}$ står normalt på en ekvipotensialflate. I figuren blir ekvipotensialflatene loddrette streker (plan), slik at punktene 1 og 5 må ligge på samme potensial.

d) B. Vi har sammenhengene $\Delta V = -\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$ og $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ mellom elektrisk felt og elektrisk potensial. Fortegnet tilsier at $\boldsymbol{E}$ peker i den retning V *avtar* raskest. I figuren avtar derfor V fra venstre mot høyre, og punkt 2 har høyest potensial.

e) D. Se punkt *d*). Bommet du på den, bommet du vel på denne også.... (Til midtsemesterprøven vil jeg nok unngå slike "koblede" spørsmål der feil på det ene automatisk fører til feil også i det andre.)