

Løsningsforslag til øving 5

Veiledning mandag 15. september

Oppgave 1

Denne oppgaven dreier seg om å bruke Gauss' lov, på integralform,

$$\phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = Q/\varepsilon_0,$$

og differensialform,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0.$$

Det første vi kan merke oss er at $\mathbf{E} = E_x \hat{x}$ i de tre første tilfellene har retning langs x -aksen. Det betyr at det da ikke går noe fluks gjennom de av kubens flater som har flatenormal i y - eller z -retning, bare gjennom de to flatene med flatenormal i x -retning. I tilfelle d) må vi også ta med flatene med flatenormal i y -retning.

a) Her er $E_x = C$, dvs konstant. Da må vi ha like stor elektrisk fluks inn gjennom flaten ved $x = 0$ som vi har ut gjennom flaten ved $x = a$:

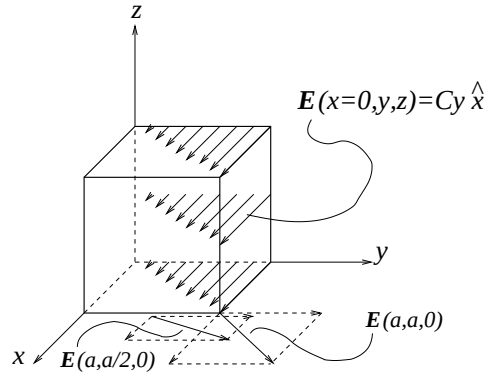
$$\phi_{\text{inn}} = \phi_{\text{ut}} = E_x A = C a^2$$

der $A = a^2$ er arealet av en sideflate. Dermed blir netto fluks $\phi_E = 0$ gjennom kubens overflate, og ifølge Gauss' lov også netto ladning inne i kubens $Q = 0$.

b) Her er $E_x = Cx$. På de to sideflatene ved $x = 0$ og $x = a$ er da feltstyrken henholdsvis $E_x(0) = 0$ og $E_x(a) = Ca$. Dermed blir det null fluks gjennom flaten ved $x = 0$, mens fluksen ut ved $x = a$ blir $\phi_{\text{ut}}(x = a) = Ca \cdot a^2 = Ca^3$. Dette blir da også netto fluks gjennom S , $\phi_E = Ca^3$. Gauss' lov gir netto ladning $Q = C\varepsilon_0 a^3$ inne i kubens.

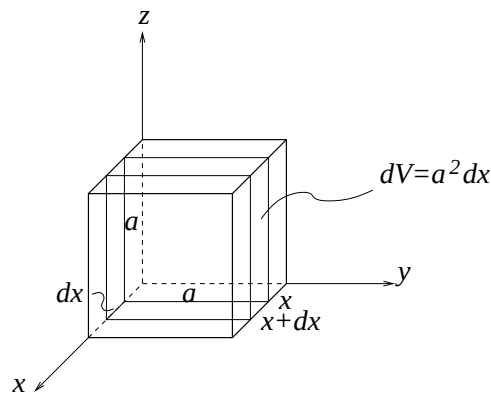
c) Her er $E_x = Cx^2$. Igjen er $E_x(0) = 0$, mens $E_x(a) = Ca^2$. Nok en gang får vi null fluks gjennom flaten ved $x = 0$, mens fluks ut ved $x = a$ blir $\phi_{\text{ut}}(x = a) = Ca^2 \cdot a^2 = Ca^4$, som også her blir netto fluks gjennom S . Med Gauss' lov: $Q = C\varepsilon_0 a^4$ for netto ladning i kubens.

d) Nå er $E_x = Cy$ og $E_y = Cx$, og vi får fluks gjennom i alt fire av de seks sideflatene. Figuren illustrerer feltet på planet $x = 0$. I tillegg har vi tatt med et par eksempler på planet $x = a$, hvor y -komponenten av feltet er konstant og lik Ca , mens x -komponenten vokser lineært med y .



Det hele kan kanskje se litt komplisert ut, men forenkler seg drastisk ved nærmere ettertanke: Vi ser nemlig at E_x ikke avhenger av x og tilsvarende at E_y ikke avhenger av y . Det betyr at fluksen inn gjennom flaten ved $x = 0$ må være like stor som fluksen ut gjennom flaten ved $x = a$. På samme vis: Like stor fluks inn gjennom flaten ved $y = 0$ som ut ved $y = a$. Konklusjon: Null netto fluks gjennom hele den lukkede flaten, og null netto ladning innenfor flaten, ifølge Gauss' lov.

e) Vi skal for tilfellet c), dvs med $\mathbf{E} = Cx^2\hat{x}$, bestemme ladningstettheten ρ inne i kublen. Vi følger henvisningene i oppgaveteksten og starter med å se på et lite volumelement $dV = a^2 dx$, dvs en tynn skive beliggende mellom x og $x + dx$:



For å finne netto fluks ut gjennom overflaten til denne tynne skiva, må vi bestemme fluksen *inn* ved x og fluksen *ut* ved $x + dx$. Det elektriske feltet på disse to flatene er:

$$\begin{aligned} E(x) &= Cx^2 \\ E(x + dx) &= C(x + dx)^2 \\ &= Cx^2 + 2Cx dx + C(dx)^2 \\ &\simeq Cx^2 + 2Cx dx \end{aligned}$$

Legg merke til tilnærmelsen vi gjør her: Vi neglisjerer $C(dx)^2$ i forhold til $2Cx dx$. Det kan vi trygt gjøre ettersom dx er en infinitesimal tykkelse, dvs vi er interessert i grensen $dx \rightarrow 0$. Fluksen gjennom de to flatene får vi ved å multiplisere feltstyrken med arealet, dvs a^2 . Dermed blir netto fluks ut gjennom den lille (infinitesimale) gaussflaten

$$\phi = E(x + dx)a^2 - E(x)a^2 = 2Ca^2x dx$$

Ifølge Gauss' lov skal dette være lik ladningen inne i den tynne skiva dividert med ε_0 . Ladningen inne i skiva kan vi skrive som *ladningstettheten* ρ multiplisert med volumet:

$$dq = \rho dV = \rho a^2 dx$$

Dermed:

$$\begin{aligned} 2Ca^2 x dx &= \frac{\rho a^2 dx}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow \rho &= 2C\varepsilon_0 x \end{aligned}$$

Det var ved hjelp av Gauss' lov på *integralform*. Ikke uventet er det atskillig enklere å bestemme ρ ved hjelp av samme lov på *differensialform*, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$. Denne ligningen er jo nærmest skreddersydd for å bestemme ρ når $\mathbf{E}$ er kjent; det er bare snakk om å foreta en derivasjon. Her er $\mathbf{E} = E_x \hat{x} = Cx^2 \hat{x}$, slik at

$$\rho = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = 2C\varepsilon_0 x$$

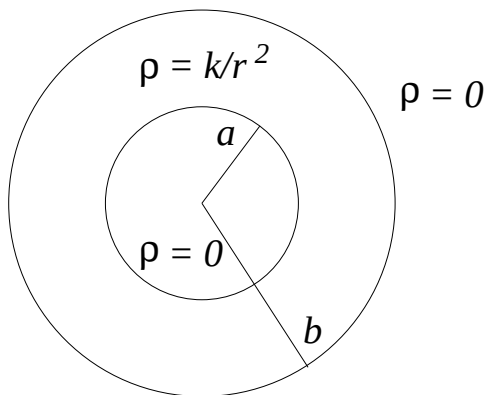
Samme svar som ovenfor!

Kommentarer:

- Merk at vi her har brukt Gauss' lov på integralform med en gaussflate som omslutter et differensielt volumelement. Det er helt i orden; vi velger selv hva som er en fornuftig gaussflate - stor eller liten. Men *lukket* må den være!
- I punkt c) bestemte du total ladning Q inne i kuben. Nå har du bestemt ladningstettheten ρ . Kontroller at de to svarene er konsistente!

Oppgave 2

Det første vi må se etter, når beskjeden er “bruk Gauss' lov...”, er om problemet har en “passende”, dvs utnyttbar, symmetri. Her ser vår ladningsfordeling slik ut:



Med andre ord, vi har en kulesymmetrisk ladningstetthet. Da må det elektriske feltet overalt være radielt rettet, og kun avhenge av avstanden fra kuleskallets sentrum: $\mathbf{E} = E(r)\hat{r}$. Vi velger da naturligvis en kuleflate med radius r som gaussflate. (Det som hittil er sagt må vi nesten bare *innse*. I *hvilken* retning skulle $\mathbf{E}$ peke om det ikke var radielt?)

Over hele gaussflaten har da $E(r)$ samme verdi, og dessuten er $d\mathbf{A}$ parallell med $\mathbf{E}$. Gauss' lov blir dermed

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{q(r)}{\varepsilon_0}$$

der $q(r)$ er netto ladning innenfor gaussflaten, dvs innenfor et kuleskall med radius r . Sammenhengen mellom $q(r)$ og ρ er:

$$q(r) = \int \rho dV = \int_0^r \rho(r') \cdot 4\pi(r')^2 dr'$$

Her har vi uttrykt volumelementet dV i kulekoordinater (se øving 4) og integrert over alle *romvinkler*, dvs over alle verdier av vinklene θ og ϕ , for å få faktoren 4π . Dette kan vi gjøre ettersom ρ kun avhenger av avstanden fra sentrum og ikke retningen. Alternativt, siden vi har kulesymmetri, kan vi direkte velge volumelementet dV som et tynt kuleskall mellom r' og $r' + dr'$. Volumet av et slik kuleskall må bli arealet av kuleflaten, $4\pi(r')^2$ multiplisert med skallets tykkelse dr' .

Med den oppgitte ladningstettheten ρ finner vi

$$q(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ 4\pi k \int_a^r dr' = 4\pi k(r - a) & a < r < b \\ 4\pi k \int_a^b dr' = 4\pi k(b - a) & r > b \end{cases}$$

Dvs: Total ladning innenfor et kuleskall med radius r øker lineært med r når vi passerer $r = a$. Med $r < a$ er $\rho = 0$, og selvsagt $q(r) = 0$ også. Alle kuleskall med $r > b$ omslutter hele ladningen $4\pi k(b - a)$.

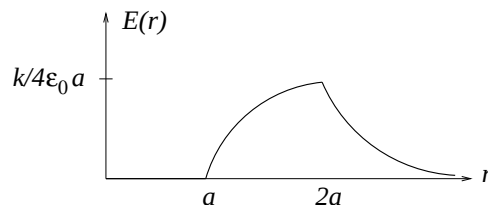
Gauss' lov gir til slutt det elektriske feltet:

$$E(r) = \frac{q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \begin{cases} 0 & r < a \\ k(r - a)/\varepsilon_0 r^2 & a < r < b \\ k(b - a)/\varepsilon_0 r^2 & r > b \end{cases}$$

Med $b = 2a$:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ k(r - a)/\varepsilon_0 r^2 & a < r < 2a \\ ka/\varepsilon_0 r^2 & r > 2a \end{cases}$$

Skisse:

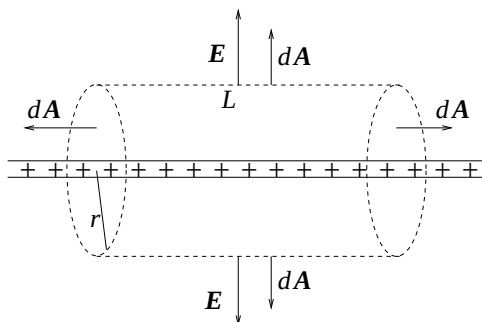


Kommentar: Å *skissere* innebærer å tegne opp noe “sånn omtrentlig”. En bør imidlertid se litt på den størrelsen som skal skisseres, i dette tilfellet funksjonen $E(r)$, og prøve å få med “det opplagte”. For eksempel: En bør se at $E(r)$ er *kontinuerlig*. Dermed mangler i grunnen bare *formen* på kurven i området $a < r < 2a$. (For $r > 2a$ faller $E(r)$ av som $1/r^2$, det klarer vi

greit!) Ved å derivere $E(r)$ to ganger finner en at helningen er positiv (men ikke uendelig, dvs ikke loddrett) i $r = a$ og lik null (dvs vannrett) i $r = 2a$, dessuten at krumningen er negativ i hele området $a < r < 2a$.

Oppgave 3

En uendelig lang, jevnt ladet stav må resultere i et elektrisk felt som for det første er radielt rettet bort fra staven (evt inn mot staven, hvis den var negativt ladet), og for det andre kun avhengig av avstanden r fra staven. Med litt ettertanke innser vi da at det er lurt å velge en sylinder som gaussflate, slik at den ladete staven går gjennom sylinderens akse:



På sylinderflaten er da “flateelementvektoren” $d\mathbf{A}$ enten normal til $\mathbf{E}$ (på de to endeflatene) eller parallell med $\mathbf{E}$ (på resten av overflaten). Der $d\mathbf{A}$ er parallell med $\mathbf{E}$, dvs der vi får et bidrag til flateintegralet i Gauss’ lov, har $E(r)$ overalt samme verdi og kan trekkes utenfor integralet. På de to endeflatene er $\mathbf{E}$ parallell med flaten (normal til flatenormalen!), så ingen elektrisk fluks går gjennom disse. Med en omkrets på $2\pi r$ og en lengde L blir arealet av sylinderoverflaten $2\pi rL$. Hvor mye ladning befinner seg innenfor denne gaussflaten? Med ladning λ pr lengdeenhet og lengde L må den bli $Q = \lambda L$.

Gauss’ lov gir da:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E(r) \cdot 2\pi rL = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

slik at det elektriske feltet blir

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

som vi skulle vise.

I oppgave 1 i øving 2 viste vi at feltet i avstand r fra en jevnt ladet stav med *endelig* lengde hadde komponenter

$$E_{\perp} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)$$

normalt på staven, og

$$E_{\parallel} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

parallelt med staven. Linjene fra observasjonspunktet til endene av staven danner vinklene θ_1 (positiv) og θ_2 (negativ) med normallinjen fra observasjonspunktet og ned på staven. Det betyr

at dersom vi lar stavens lengde gå mot uendelig, vil vinklene θ_1 og θ_2 gå mot henholdsvis $\pi/2$ og $-\pi/2$, slik at

$$E_{\perp} \rightarrow \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

og

$$E_{\parallel} \rightarrow 0$$

Altså det samme som vi fant med Gauss' lov.

Oppgave 4

a) D. Det følger av Gauss' lov på integralform at flaten da omslutter en netto negativ ladning. På den lukkede flaten er flatelementvektoren $d\mathbf{A}$ definert positiv med retning *ut av* flaten. Med $\mathbf{E}$ overalt rettet innover blir da alle bidrag $d\phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ til fluksen gjennom den lukkede flaten negative. Den totale fluksen gjennom flaten er lik omsluttet ladning (delt på konstanten ϵ_0), som da også må være negativ.

b) A. Netto elektrisk fluks ut gjennom flaten skal ifølge Gauss' lov være lik netto omsluttet ladning delt på konstanten ϵ_0 . Her er netto omsluttet ladning $q - q = 0$.

c) B. Her er netto omsluttet ladning $-2q + q = -q$.

d) B. Potensialet fra en punktladning er $V(r) = q/4\pi\epsilon_0 r$ når $V(r \rightarrow \infty)$ er satt til null. Med $V = 50$ V finner vi

$$r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 V} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-8}}{50} = 1.8 \text{ m}$$

Med SI-enheter for alle størrelser som inngår er vi garantert at svaret også kommer ut i SI-enhet, dvs m.

e) E. Det elektriske feltet er den negative gradienten til potensialet, $\mathbf{E} = -\nabla V$. Her har vi oppgitt at potensialet er konstant lik 100 V, og gradienten til en konstant er lik null.