

Løsningsforslag til øving 6

Veiledning mandag 22. september

Oppgave 1

a) Maksimalt elektrisk felt på 3 MV/m oppnås med en overflateladningstetthet

$$\sigma_{\max} = \varepsilon_0 E_{\max} = 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^6 = 2.7 \cdot 10^{-5} \text{C/m}^2$$

b) Ei metallkule med radius R og ladning Q har en flateladningstetthet

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

Vi ser at maksimal σ tilsvarer minimal R :

$$R_{\min} = \sqrt{\frac{Q}{4\pi\sigma_{\max}}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi \cdot 2.7 \cdot 10^{-5}}} \simeq 54 \text{m}$$

c) På en overflate med atomene ordnet i et regulært kvadratisk gitter med en avstand på 0.3 nm mellom nærmeste naboer opptar hvert overflateatom et areal $A_0 = (0.3 \cdot 10^{-9})^2 = 9 \cdot 10^{-20} \text{m}^2$. Da må antall overflateatomer pr m^2 bli $(9 \cdot 10^{-20})^{-1} = 1.1 \cdot 10^{19}$

[Dersom overflateatomene i stedet var ordnet i et regulært *triangulært* gitter (med samme nærmeste-nabo-avstand 0.3 nm = 3 Å), ville arealet pr overflateatom bli en regulær *sekskant* med sidekanter $\sqrt{3}$ Å. Arealet av en slik sekskant er $9\sqrt{3}/2 \text{ Å}^2 \simeq 7.8 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2$, som gir ca $1.3 \cdot 10^{19}$ atomer pr m^2 . Med andre ord, litt tettere pakket enn med kvadratisk gitter!]

d) Med en ladning pr flateenhet lik $\sigma_{\max} = 2.7 \cdot 10^{-5} \text{C/m}^2$ og $1.1 \cdot 10^{19}$ overflateatomer pr m^2 , har vi en midlere ladning pr overflateatom lik $2.7 \cdot 10^{-5} / 1.1 \cdot 10^{19} = 2.45 \cdot 10^{-24} \text{C}$, som er $2.45 \cdot 10^{-24} / 1.6 \cdot 10^{-19} = 1.5 \cdot 10^{-5}$ av ladningen til et elektron. Dette må da også representere andelen av overflateatomer som har fått ett ekstra elektron.

Oppgave 2

Vi har at $E = 0$ overalt inne i metallet i elektrostatisk likevekt. (Se forelesningene.) Det betyr, ifølge Gauss' lov, at en gaussflate S (lukket flate) som omslutter hulrommet, og som i sin helhet ligger inne i lederen, omslutter null netto ladning (q_{in}):

$$E = 0 \Rightarrow q_{\text{in}} = \varepsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

Denne gaussflaten kan legges vilkårlig nært inntil hulrommets overflate, så konklusjonen må bli at det totalt er indusert en fri ladning $-q$ på hulrommets overflate. Da blir nemlig total ladning innenfor gaussflaten lik $q - q = 0$.

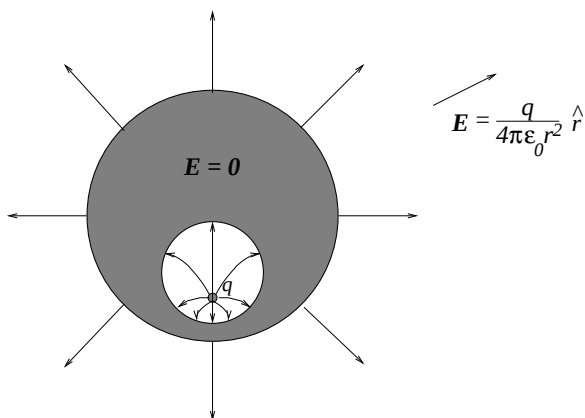
Denne induerte ladningen vil fordele seg på hulrommets overflate på en slik måte at det elektriske feltet forsvinner overalt inne i lederen. Med andre ord, bidraget til feltet inne i lederen fra punktladningen q må presis kanselleres av bidraget fra den induerte ladningen $-q$. Da er det vel mer eller mindre opplagt (?) at vi må få størst induert ladning nederst, der punktladningen ligger nært overflaten, og minst induert ladning øverst, der punktladningen ligger lenger unna overflaten.

Da lederen har null netto ladning, må vi ha fått induert en ladning q på lederens ytre overflate. (Husk: Ingen netto ladning inne i en leder i likevekt!) Denne ladningen vil fordele seg jevnt utover den ytre overflaten fordi “asymmetrien” forårsaket av punktladningen inne i hulrommet oppheves av den induerte ladningen $-q$ på hulrommets overflate.

På utsiden av kula “ser” vi dermed rett og slett en kulesymmetrisk overflateladning, slik at det elektriske feltet utenfor kula blir

$$\mathbf{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

der r er avstanden fra sentrum av kula. Elektriske feltlinjer må bli omtrent slik:



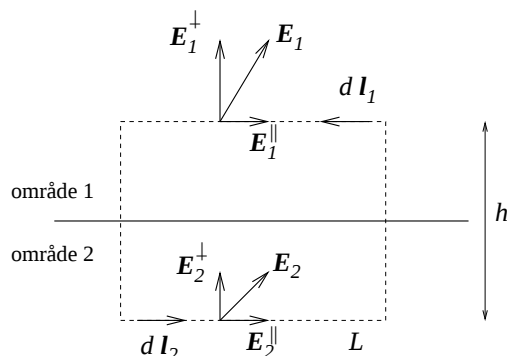
Vi har valgt å tegne 8 feltlinjer pr ladning q . Alle 8 feltlinjer som starter på punktladningen må ende opp på hulrommets overflate, og slik at de står normalt på overflaten. (Elektrisk felt alltid normalt på overflaten!) Inne i lederen er $E = 0$, så her har vi ingen feltlinjer. På den ytre overflaten har vi en ladning q jevnt fordelt utover, så her får vi igjen 8 feltlinjer, radielt rettet utover.

Kommentar: Det fulgte umiddelbart av Gauss' lov og av det faktum at $E = 0$ inne i lederen at den totale induerte ladningen blir hhv $-q$ og q på indre og ytre overflate. Men vi har vel strengt tatt ikke ført noe skikkelig argument for hvordan disse induerte overflateladningene vil *fordele seg*. En ting er sikkert: *Tilsammen* må ladningene fordele seg slik at vi får $E = 0$ overalt inne i lederen. Jeg har rett og slett *påstått* at punktladningen q og ladningen $-q$ på hulrommets overflate sørger for dette *alene*, uten “hjelp” av ladningen q på ytre overflate. Kan vi være sikre på at dette i det hele tatt er mulig? Jo: Tenk deg en gigantisk metallkule med et lite hulrom dypt inne i kula, og med en punktladning plassert i hulrommet slik som her. Nå er all ladning på ytre overflate så langt unna hulrommet at for å oppnå $E = 0$ inne i lederen i nærheten av hulrommet, må ladningen $-q$ på hulrommets overflate kansellere feltet fra punktladningen alene. Vi kan altså fastslå at det *er mulig* å oppnå $E = 0$ inne i lederen uten bruk av ladningen på ytre overflate. Men da kan vi faktisk konkludere med at dette er den *eneste* muligheten,

uansett om kula er stor eller liten. Man har nemlig såkalte *entydighetsteorem* i elektrostatikken som garanterer at en *mulig* ladningsfordeling også er den *eneste* mulige. (Ikke pensum! Men se f.eks. Griffiths, kapittel 3 hvis du er interessert.)

Oppgave 3

Vi ser først på komponenten av $\mathbf{E}$ tangentielt med grenseflaten. Den ene av Maxwells ligninger sier at kurveintegralet av $\mathbf{E}$ rundt en lukket kurve skal være lik null. Vi bruker tipsene i oppgaveteksten og integrerer rundt den rektangulære kurven vist i figuren:



Når vi lar “høyden” h gå mot null, får vi null bidrag til kurveintegralet fra de to vertikale bitene av rektangelet. Bidraget fra den horisontale biten i område 2 blir $E_2^{\parallel}L$ ettersom feltet her peker samme vei som veelementet $d\mathbf{l}_2$. Bidraget fra den horisontale biten i område 1 blir $-E_1^{\parallel}L$, for her peker feltet motsatt vei av $d\mathbf{l}_1$. Det totale bidraget skal ifølge Maxwell forsvinne, slik at

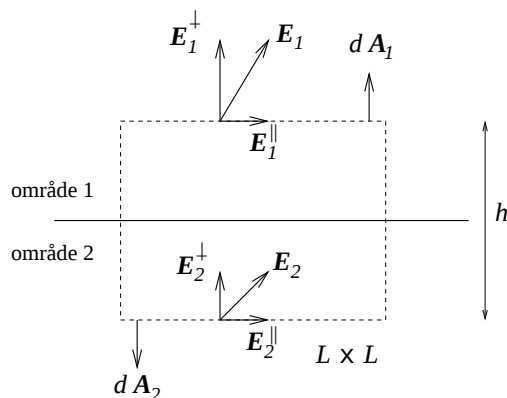
$$E_2^{\parallel}L - E_1^{\parallel}L = 0$$

dvs

$$E_2^{\parallel} = E_1^{\parallel}$$

Konklusjon: Tangentialkomponenten av $\mathbf{E}$ er kontinuerlig når vi krysser en grenseflate.

I neste omgang ser vi på komponenten av $\mathbf{E}$ normalt på grenseflaten. Den andre Maxwell-ligningen, dvs Gauss’ lov, sier at flateintegralet av $\mathbf{E}$ over en lukket flate skal være lik netto ladning innenfor den lukkede flaten, dividert med konstanten ε_0 .



Igjen er vi interessert i hva som skjer idet vi krysser grenseflaten, så vi lar høyden av pilleesken h gå mot null. Det betyr at arealet av 4 av de 6 sideflatene på den valgte gaussflaten går mot null, så de eneste bidragene til flateintegralet i Gauss' lov (dvs til den elektriske fluksen gjennom gaussflaten) blir fra "topplokke" i område 1 og fra "bunnen" i område 2. Førstnevnte bidrag blir $E_1^\perp A$ ($A = L \times L$), ettersom normalkomponenten av feltet peker i samme retning som flatenormalen $d\mathbf{A}_1$. Sistnevnte bidrag blir $-E_2^\perp A$, for her peker feltets normalkomponent i motsatt retning av flatenormalen $d\mathbf{A}_2$. Netto ladning innenfor gaussflaten er

$$q_{\text{in}} = \sigma A$$

Gauss' lov gir dermed

$$E_1^\perp A - E_2^\perp A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

dvs

$$E_1^\perp - E_2^\perp = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Konklusjon: Normalkomponenten av $\mathbf{E}$ er diskontinuerlig når vi krysser en grenseflate med nettoladning forskjellig fra null.

Kommentar: I utledningen ovenfor har jeg valgt bestemte retninger for det elektriske feltet like over og like under grenseflaten. I utgangspunktet kjenner jeg selvsagt ikke disse retningene og kunne f.eks. like gjerne ha prøvd meg med helt motsatt retning på vektoren $\mathbf{E}_1$. Konklusjonene hadde imidlertid blitt de samme! Under betraktning av f.eks. tangentialkomponenten ville begge bidragene til kurveintegralet da blitt positive, slik at resultatet hadde blitt

$$E_2^\parallel = -E_1^\parallel$$

Men her betyr jo minustegnet nettopp at valget av *relativ retning* på $\mathbf{E}_1$ og $\mathbf{E}_2$ da hadde blitt "feil", dvs *gitt* en viss retning på $\mathbf{E}_2$, så må $\mathbf{E}_1$ peke i en slik retning at tangentialkomponenten av $\mathbf{E}$ blir den samme på de to sidene av grenseflaten.

Samme argumentasjon gjør seg gjeldende ved betraktning av normalkomponenten av feltet.

Kommentar 2: Egentlig kan alt ovenstående sammenfattes i følgende enkle løsning: Bidraget til det totale elektriske feltet fra ladningen σ i flaten er $\sigma/2\varepsilon_0$, rettet vinkelrett bort fra flaten på begge sider. "Resten av verden" bidrar med et felt $\mathbf{E}_{\text{ytre}}$ i tillegg til feltet fra σ , men $\mathbf{E}_{\text{ytre}}$ må være kontinuerlig når vi krysser flaten. Da må det totale feltet ha en diskontinuerlig normalkomponent, med diskontinuitet $2 \cdot \sigma/2\varepsilon_0 = \sigma/\varepsilon_0$, mens tangentialkomponenten må være kontinuerlig.

Oppgave 4

a) På den positive ladningen virker en kraft $\mathbf{F}_+ = q\mathbf{E}$ og på den negative ladningen virker en kraft $\mathbf{F}_- = -q\mathbf{E}$. Total kraft blir summen av disse:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = q\mathbf{E} - q\mathbf{E} = 0$$

b)

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_+ \times \mathbf{F}_+ + \mathbf{r}_- \times \mathbf{F}_- = \frac{\mathbf{a}}{2} \times (q\mathbf{E}) + \left(-\frac{\mathbf{a}}{2}\right) \times (-q\mathbf{E}) = q\mathbf{a} \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

Vi har valgt positiv retning for vinkelen θ som vist i figuren i oppgaveteksten. Vektoren $\mathbf{p} \times \mathbf{E}$ vil da for positive θ mellom 0 og 180 grader peke inn i papirplanet, dvs i negativ z -retning. Da må vi inkludere et negativt fortegn:

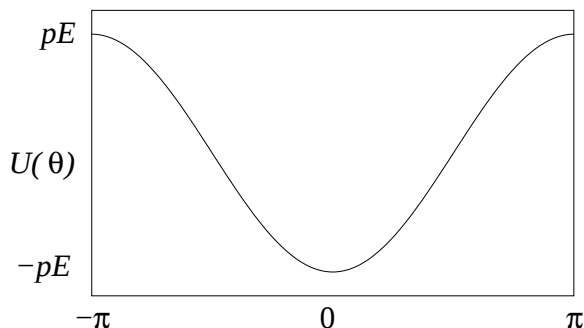
$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} = -pE \sin \theta \hat{z}$$

c) Med $\tau = -\partial U / \partial \alpha$ har vi $dU = -\tau d\alpha$. Det betyr at en liten dreining av dipolen en vinkel $d\alpha$ under påvirkning av dreiemomentet τ resulterer i en endring dU i potensiell energi gitt ved $-\tau d\alpha$. Potensiell energi for en gitt verdi av vinkelen θ mellom $\mathbf{E}$ og $\mathbf{p}$, i forhold til en valgt referanse $U(\theta_0)$, blir da

$$\begin{aligned} U(\theta) &= \int_{\theta_0}^{\theta} dU \\ &= - \int_{\theta_0}^{\theta} \tau(\alpha) d\alpha \\ &= pE \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \alpha d\alpha \\ &= pE (\cos \theta_0 - \cos \theta) \\ &= -pE \cos \theta \end{aligned}$$

Her valgte jeg å sette $U(0) = -pE$, dvs $\theta_0 = \pi/2$.

Skisse:



Vi har minimal U , og følgelig stabil likevekt for $\theta = 0$, dvs for dipolen orientert slik at $\mathbf{p}$ er parallell med $\mathbf{E}$.

Dette er nettopp hva vi har snakket om i forelesningene i det siste: Elektriske dipoler, f.eks. i et dielektrikum, retter seg inn langs det påtrykte elektriske feltet.