Institutt for fysikk, NTNU
TFY4150/FY1303/SIF4012/MNFFY103 Elektrisitet og magnetisme
Høst 2003

Løsningsforslag til øving 9

Veiledning mandag 13. oktober

Oppgave 1

a) Med kulesymmetrisk ladningsfordeling må det elektriske feltet overalt være radielt rettet, og kun avhengig av avstanden r fra kuleskallenes sentrum. Med dielektrikum til stede bestemmer vi først den elektriske forskyvningen $D(r)$ i området $a < r < b$ ved hjelp av Gauss' lov. Vi bruker et kuleskall med radius r som gaussflate. Innenfor dette kuleskallet er total fri ladning lik q, så vi får

$$D(r) \cdot 4\pi r^2 = q \quad \Rightarrow \quad D(r) = \frac{q}{4\pi r^2}$$

Sammenhengen mellom D og E er

$$D(r) = \varepsilon E(r)$$

Dermed kan potensialforskjellen mellom de to lederne bestemmes:

$$\begin{aligned}
\Delta V &= V_a - V_b \\
&= -\int_a^b E(r)\, dr \\
&= -\int_a^b \frac{D(r)}{\varepsilon} dr \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \\
&= \frac{q(b-a)}{4\pi\varepsilon ab}
\end{aligned}$$

Kapasitansen til kulekondensatoren er dermed

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{4\pi\varepsilon ab}{(b-a)}$$

Dersom det dielektriske sjiktet er veldig tynt, har vi $a \simeq b$, og tilnærmet samme areal $A \simeq 4\pi ab \simeq 4\pi a^2 \simeq 4\pi b^2$ på de to lederne. Dermed, med $d = b - a =$ avstanden mellom lederne, får vi

$$C \simeq \varepsilon \frac{A}{d}$$

dvs som for en parallellplatekondensator.

b) Hvis vi betrakter en enkelt ledende kule som grensetilfellet $b \to \infty$ i punkt a), og i tillegg lar $\varepsilon \to \varepsilon_0$, har vi

$$C = 4\pi\varepsilon_0 a$$

for kapasitansen til en kule med radius a.

Oppgave 2

I denne oppgaven har vi en *fast* potensialforskjell på 100 V mellom de to metallplatene. Det betyr f.eks. at den totale fri ladningen på en gitt plate ikke blir den samme i de tre tilfellene. Se også oppgavene 7 og 12 –19 i øving 8, hvor lignende ting blir berørt.

Et av målene med denne oppgaven er å bestemme de tre kapasitansene C_a, C_b og C_c. Med bakgrunn i oppgavene 12, 13, 18 og 19 i øving 8, kan vi kanskje starte med å skrive ned hva disse kapasitansene må bli.
I (a) har vi en parallellkobling av to parallellplatekondensatorer, begge med plateavstand d og plateareal $A/2$, den ene luftfylt, og den andre fylt med dielektrikum med permittivitet ε_1. Kapasitansen til hver av disse kan vi skrive ned direkte, henholdsvis

$$C_a^h = \varepsilon_0 \frac{A}{2d}$$

for halvdelen til høyre og

$$C_a^v = \varepsilon_1 \frac{A}{2d}$$

for halvdelen til venstre. I oppgave 12, øving 8 fant vi ut at den totale kapasitansen til parallellkoblede kapasitanser finner vi ved å legge sammen enkeltkapasitansene. Dermed har vi

$$C_a = C_a^v + C_a^h = \varepsilon_0 \frac{A}{2d} (\varepsilon_{r1} + 1)$$

I (b) har vi en seriekobling av to parallellplatekondensatorer, begge med plateavstand $d/2$ og plateareal A, den ene fylt med dielektrikum med permittivitet ε_2 og den andre fylt med dielektrikum med permittivitet ε_3. Kapasitansen til hver av disse kan vi skrive ned direkte, henholdsvis

$$C_b^o = \varepsilon_2 \frac{2A}{d}$$

for halvdelen oppe

$$C_b^n = \varepsilon_3 \frac{2A}{d}$$

for halvdelen nede. I oppgave 13, øving 8 fant vi ut at den totale inverse kapasitansen til seriekoblede kapasitanser finner vi ved å legge sammen de enkelte inverse kapasitansene. Dermed har vi

$$C_b = \left(\frac{1}{C_b^o} + \frac{1}{C_b^n} \right)^{-1} = \varepsilon_0 \frac{2A}{d} \cdot \frac{\varepsilon_{r2}\varepsilon_{r3}}{\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r3}}$$

I (c) har vi en parallellkobling av to parallellplatekondensatorer, den ene med plateavstand d, plateareal $A/2$ og fylt med dielektrikum med permittivitet ε_1, og den andre en seriekobling som i (b), men med plateareal $A/2$ istedetfor A. Den totale kapasitansen må derfor bli

$$\begin{aligned} C_c &= \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \frac{A}{2d} + \varepsilon_0 \frac{A}{d} \cdot \frac{\varepsilon_{r2}\varepsilon_{r3}}{\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r3}} \\ &= \varepsilon_0 \frac{A}{d} \left(\frac{\varepsilon_{r1}}{2} + \frac{\varepsilon_{r2}\varepsilon_{r3}}{\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r3}} \right) \end{aligned}$$

Med de oppgitte tallverdiene har vi $A = 10^{-3}$ m^2 og $d = 10^{-3}$ m, slik at $A/d = 1$ m. Videre er $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m $= 8.85$ pF/m. De tre kapasitansene blir dermed

$$\begin{aligned}
C_a &= \varepsilon_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot (4+1) = 2.5\varepsilon_0 = 22.1 \\
C_b &= \varepsilon_0 \cdot 2 \cdot \frac{6 \cdot 2}{6+2} = 3\varepsilon_0 = 26.6 \\
C_c &= \varepsilon_0 \cdot 1 \cdot \left(\frac{4}{2} + \frac{6 \cdot 2}{6+2}\right) = 3.5\varepsilon_0 = 31.0
\end{aligned}$$

alle tre i enheter pF.

Så tilbake til fysikken! La oss først se kvalitativt på hva som skjer.
I (a) blir dielektrikumet til venstre polarisert i det elektriske feltet fra de to metallplatene. Da vet vi at nettoresultatet blir en indusert overflateladning på hver side av dielektrikumet, her negativ øverst og positiv nederst, ettersom øverste og nederste metallplate har hhv positiv og negativ ladning. I forhold til en fullstendig luftfylt kondensator, med jevnt fordelt fri ladning over hele metallplatenes areal, har vi nå forstyrret likevekten, men denne gjenopprettes ved at ekstra fri ladning strømmer inn i venstre halvdel av metallplatene. I likevekt har en gitt metallplate konstant potensial over det hele, og da må det elektriske feltet E_a også være like stort på høyre og venstre side. For ladningsfordelingen betyr det at *total* ladning på høyre og venstre side må være like stor. La oss kalle (tettheten av) fri ladning hhv σ_{af}^v og σ_{af}^h til venstre og høyre, og indusert (bundet) ladning σ_{ai}^v til venstre. (Til høyre har vi ingen polarisering og derfor heller ingen indusert ladning.) Vi lar dessuten notasjonen være slik at alle σ er *positive.* Da må vi altså ha

$$\sigma_{af}^h = \sigma_{af}^v - \sigma_{ai}^v$$

for å ha like mye total ladning til høyre og til venstre.
I (b) blir hele volumet mellom platene polarisert, og vi får indusert overflateladning på begge sider av begge dielektrika. Dielektrikumet øverst har størst relativ permittivitet. Det betyr at vi får sterkere polarisering i dette området enn i den nedre halvdelen. Følgelig må indusert ladning oppe, σ_{bi}^o, være større enn indusert ladning nede, σ_{bi}^n. Fortegnet på de induserte ladningene må være negativt oppe ved øverste metallplate, positivt nede ved nederste metallplate, og følgelig positivt på nedre overflate av øvre dielektrikum, og negativ på øvre overflate av nedre dielektrikum. I dette tilfellet har vi ingen forskjell mellom høyre og venstre, så fri ladning er jevnt fordelt i metallplatene. Videre må veiintegralet av det elektriske feltet fra den ene til den andre plata fremdeles ha verdien $\Delta V = 100$ V. Med kun luft mellom platene ville vi hatt et uniformt elektrisk felt $E_0 = \Delta V/d = 100/10^{-3} = 10^5$ V/m $= 100$ kV/m $= 100$ V/mm. Nå har vi konkludert med sterkest polarisering i det øverste laget. Derfor må det elektriske feltet, E_b^o, her være svakere enn feltet E_b^n i det nederste laget. Det er klart at E_b^n må være større enn 100 V/mm og at E_b^o må være mindre enn 100 V/mm, og slik at

$$E_b^o \cdot \frac{d}{2} + E_b^n \cdot \frac{d}{2} = 100 \text{ V/mm}$$

Også her, hvis vi sammenligner med forholdene uten noe dielektrikum til stede, må det ha strømmet til ekstra fri ladning til metallplatene for å opprettholde den samme potensialforskjellen mellom platene. Dette sørger spenningskilden for.

Kondensator c er essensielt en kombinasjon av a og b, og vi får indusert overflateladning på de tre dielektriske mediene som diskutert for (a) og (b) ovenfor: σ_{ci}^{v} i venstre halvdel, og σ_{ci}^{oh} oppe til høyre og σ_{ci}^{nh} nede til høyre. Disse induserte ladningene må selvsagt være like store som de tilsvarende i (a) og (b):

$$\begin{aligned}\sigma_{ci}^{v} &= \sigma_{ai}^{v} \\ \sigma_{ci}^{oh} &= \sigma_{bi}^{o} \\ \sigma_{ci}^{nh} &= \sigma_{bi}^{n}\end{aligned}$$

Tilsvarende må det elektriske feltet til venstre være like stort som til venstre i (a),

$$E_c^v = E_a^v$$

og det elektriske feltet oppe og nede til høyre må være like stort som de tilsvarende i (b),

$$\begin{aligned}E_c^{oh} &= E_b^{o} \\ E_c^{nh} &= E_b^{n}\end{aligned}$$

Da har vi vel stort sett fått "kartlagt situasjonen", og dessuten etablert både notasjon og diverse sammenhenger. I tillegg til dette vet vi at (se forelesningene) elektrisk forskyvning D er lik tettheten av fri ladning, og at elektrisk polarisering P er lik tettheten av indusert ladning. Endelig har vi sammenhengene $D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon E$. For våre system kunne vi her uten fare sløyfe vektortegn: Alle vektorer $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{P}$ peker *nedover*. Vi har nå tilstrekkelig kunnskap til å regne ut alle interessante størrelser for de tre kondensatorene.

(a) Konstant elektrisk felt E_a mellom platene:

$$\Delta V = E_a \cdot d \quad \Rightarrow \quad E_a = \frac{\Delta V}{d} = 100 \text{ V/mm}$$

Elektrisk forskyvning:

$$D_a^h = \varepsilon_0 E_a = 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^5 = 885 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2 = 885 \text{ nC/m}^2$$

til høyre, og

$$D_a^v = \varepsilon_1 E_a = 4 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^5 = 3540 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2 = 3540 \text{ nC/m}^2$$

til venstre. Dette blir da også tettheten av fri ladning til høyre og venstre:

$$\begin{aligned}\sigma_{af}^{h} &= D_a^h = 885 \text{ nC/m}^2 \\ \sigma_{af}^{v} &= D_a^v = 3540 \text{ nC/m}^2\end{aligned}$$

Differansen mellom disse skal altså være lik tettheten av indusert ladning til venstre, og dessuten lik polariseringen P_a^v til venstre:

$$\sigma_{ai}^{v} = P_a^v = \sigma_{af}^{v} - \sigma_{af}^{h} = 2655 \text{ nC/m}^2$$

(b) Her har vi konstant elektrisk forskyvning mellom platene:

$$D_b^o = D_b^n = D_b = \sigma_{bf}^o = \sigma_{bf}^n = \sigma_{bf}$$

Vi vet ikke umiddelbart hva fri ladning σ_{bf} på metallplatene er, men vi kjenner sammenhengen mellom D og E i de to sjiktene, og dessuten sammenhengen mellom E og ΔV. Alt i alt:

$$\begin{aligned}
\Delta V &= \frac{d}{2}\left(E_b^o + E_b^n\right) \\
&= \frac{d}{2}\left(\frac{D_b^o}{\varepsilon_2} + \frac{D_b^n}{\varepsilon_3}\right) \\
&= \frac{D_b d}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_{r2}} + \frac{1}{\varepsilon_{r3}}\right) \\
\Rightarrow D_b &= \frac{2\varepsilon_0 \Delta V}{d}\left(\frac{1}{\varepsilon_{r2}} + \frac{1}{\varepsilon_{r3}}\right)^{-1} \\
&= 2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^5 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)^{-1} \\
&= 2655 \text{ nC/m}^2
\end{aligned}$$

Elektrisk felt oppe:

$$E_b^o = \frac{D_b}{\varepsilon_2} = \frac{2655 \cdot 10^{-9}}{6 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} = 50 \text{ kV/m} \;= 50 \text{ V/mm}$$

Elektrisk felt nede:

$$E_b^n = \frac{D_b}{\varepsilon_3} = \frac{2655 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} = 150 \text{ kV/m} \;= 150 \text{ V/mm}$$

Polarisering, og dermed også indusert ladning, oppe:

$$P_b^o = D_b - \varepsilon_0 E_b^o = D_b - \frac{D_b}{\varepsilon_{r2}} = \frac{5}{6} D_b = 2212.5 \text{ nC/m}^2 = \sigma_{bi}^o$$

Polarisering, og dermed også indusert ladning, nede:

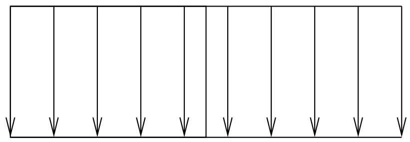
$$P_b^n = D_b - \varepsilon_0 E_b^n = D_b - \frac{D_b}{\varepsilon_{r3}} = \frac{1}{2} D_b = 1327.5 \text{ nC/m}^2 = \sigma_{bi}^n$$

(c) Her blir de ulike størrelsene til venstre som til venstre i (a), og til høyre som i (b).

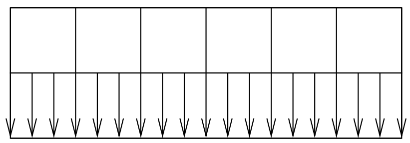
Feltlinjer:

Feltlinjer for $\boldsymbol{E}$:

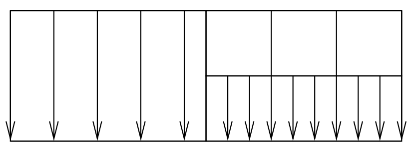
(a)



(b)

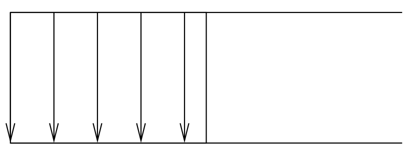


(c)

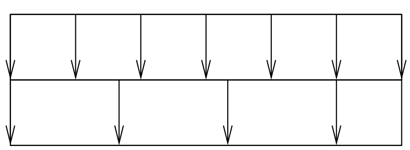


Feltlinjer for $\boldsymbol{P}$:

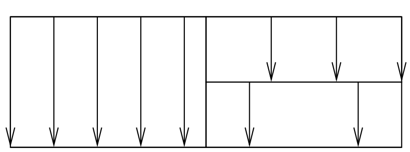
(a)

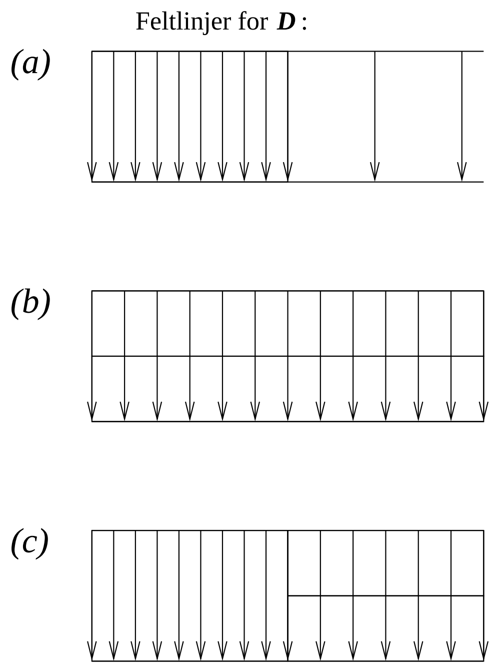


(b)

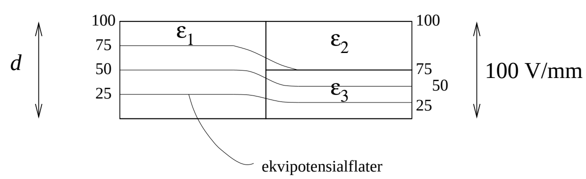


(c)





Ekstraoppgaven:
Vi har altså funnet at det elektriske feltet er 100 V/mm til venstre, 50 V/mm oppe til høyre og 150 V/mm nede til høyre i kondensator (c). Med $V = 100$V på øverste plate og $V = 0$ V på nederste plate, betyr det at midt i kondensatoren og til venstre er potensialet 50 V, mens midt i til høyre er det 75 V. Det kan vi godt ha så lenge vi befinner oss langt unna det vertikale midtplanet.
Men: Potensialet må være kontinuerlig overalt! For eksempel kan ikke ekvipotensialflaten på 75 V, som ligger 0.25 mm under øverste plate på venstre side, plutselig hoppe ned til posisjon 0.50 mm fra øvre plate når vi krysser den vertikale midtlinjen. Vi må få en eller annen slags "glatt" overgang når vi krysser denne, omtrent som vist i figuren:



Av formen på de skisserte ekvipotensialflatene ser vi at det elektriske feltet må ha en horisontal komponent i nærheten av den vertikale midtlinjen, ettersom $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ står normalt på ekvipotensialflatene. Dette er da heller ikke urimelig, når vi husker betingelsen som vi utledet i oppgave 3 i øving 6, nemlig at når en grenseflate krysses, skal tangentialkomponenten av $\boldsymbol{E}$ være kontinuerlig. Hvis E-feltet *ikke* hadde hatt en horisontalkomponent, hadde vi til venstre hatt tangentialkomponent 100 V/m, og til høyre enten 50 V/m (oppe) eller 150 V/m (nede). Men det ville jo stride mot kontinuerlig tangentialkomponent, ettersom den på venstre siden da er ulik den på høyre siden!