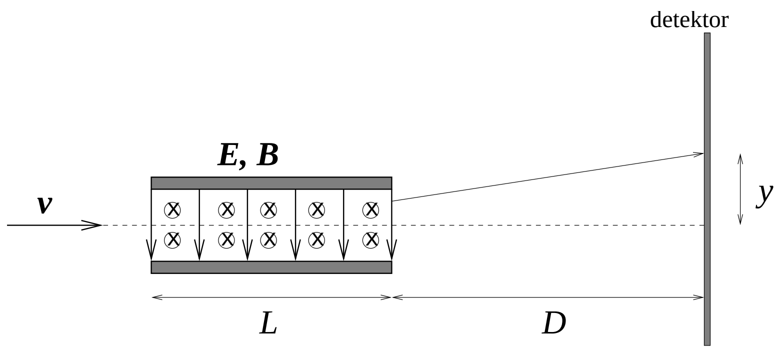
Institutt for fysikk, NTNU
TFY4150/FY1303/SIF4012/MNFFY103: Elektrisitet og magnetisme
Høst 2003

Øving 12

Veiledning: Mandag 3. november
Innleveringsfrist: Torsdag 6. november kl. 1200

Oppgave 1

Partikler med masse m, ladning q og hastighet $\boldsymbol{v}$ kommer inn i et område med "krysset" elektrisk og magnetisk felt, $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$, som vist i figuren. $\boldsymbol{E}$ har retning nedover, $\boldsymbol{B}$ har retning inn i papirplanet. I området med utstrekning L antar vi at feltene er homogene. Utenfor dette området er $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B} = 0$.



Du holder den elektriske feltstyrken E konstant gjennom hele eksperimentet. Først setter du $B = 0$ og registrerer at partiklene avbøyes og treffer detektoren i en avstand y ovenfor senterlinjen (som er stiplet). Deretter gjentar du forsøket, men nå justerer du verdien av B inntil partiklene ikke bøyes av.
Vis at du nå er i stand til å bestemme forholdet mellom partiklenes ladning og masse:

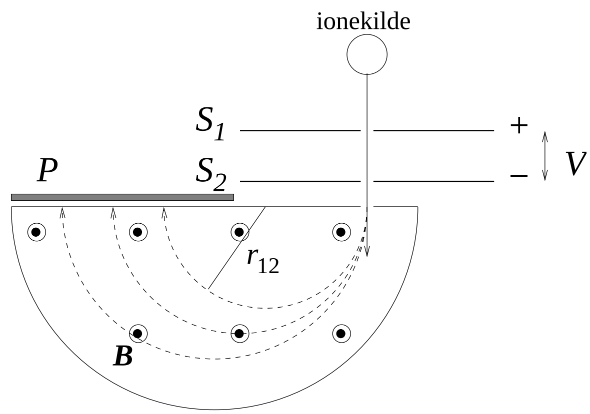
$$\frac{q}{m} = -\frac{yE}{B^2\left(DL + \frac{1}{2}L^2\right)}$$

Hvis retningen på avbøyningen er som i figuren, har partiklene da positiv eller negativ ladning? Begrunn svaret.

Oppgitt: $\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right)$ (Lorentzkraften)

På denne måten analyserte J. J. Thomson i 1897 såkalte katodestråler og påviste at disse bestod av en bestemt type partikler med negativ ladning. Dette er nettopp elektroner som emitteres fra metallet i katoden. Thomson var altså den første som bestemte forholdet e/m_e. Thomson fant det samme forholdet uavhengig av hva slags metall han brukte i katoden og kunne konkludere med at de observerte partiklene måtte være en *fundamental* ingrediens i naturen.

Oppgave 2



Figuren viser et massespektrometer. En ionekilde emitterer ladete partikler. Åpningene S_1 og S_2 sørger for at en godt samlet (*kollimert*) partikkelstråle kommer inn i området med magnetfelt $\boldsymbol{B}$ (som har retning ut av papirplanet). Mellom S_1 og S_2 har vi et spenningsfall V som akselererer ionene. Hastigheten ved S_2 er mye større enn ved S_1, slik at vi kan sette $v = 0$ ved S_1. Ionene bøyes i alt 180° av magnetfeltet og detekteres på en fotografisk plate P.
Spektrometeret skal brukes til å separere de tre karbonisotopene ^{12}C, ^{13}C og ^{14}C. Kilden sender ut disse isotopene i form av ioner med ladning $+e$. Isotopene har atommasser henholdsvis 12, 13 og 14.

a) På den fotografiske platen ønskes isotopenes treffpunkt adskilt med en avstand $a = 2.0$ cm. Bestem de tre baneradiene r_{12}, r_{13} og r_{14} og den tilhørende styrken på magnetfeltet når akselerasjonsspenningen V er 1 kV.

[Svar: 25.5 cm, 26.5 cm, 27.5 cm, 62 mT]

b) I praksis vil ionene alltid ha en viss spredning ΔW omkring middelverdien av energien. Skriv denne spredningen på formen $\Delta W = q\Delta V$ og vis at den resulterende spredningen i treffpunktet for ioner med baneradius r blir tilnærmet lik

$$\Delta a = r\frac{\Delta V}{V}$$

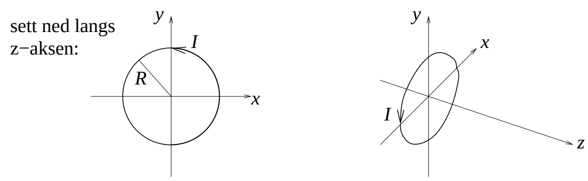
Tips: En usikkerhet Δx i en parameter x fører til en usikkerhet $\Delta f \simeq (\partial f/\partial x)\Delta x$ i størrelsen f når denne avhenger av x. Her er det antatt at usikkerhetene er små. Bruk dette til å finne hvordan ΔV påvirker Δr, og dermed Δa.

Oppgitt: $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg

(Spredningen i treffpunktet vil også påvirkes av at ionene kommer inn i magnetfeltet med en spredning i både retning og horisontal posisjon. Disse effektene ser vi for enkelhets skyld bort fra her.)

Oppgave 3

Ei sirkulær strømsløyfe med radius R fører en elektrisk strøm I. Strømsløyfa ligger i xy-planet med sentrum i origo. Retningen på I er mot klokka hvis vi har positiv z-akse ut av papirplanet. Vi skal i denne oppgaven bestemme det resulterende magnetfeltet $\boldsymbol{B}(0,0,z) = \boldsymbol{B}(z)$ *på symmetriaksen* til strømsløyfa (dvs på z-aksen).



a) Hvorfor er x- og y-komponenten av $\boldsymbol{B}(z)$ lik null?

b) I hvilken retning peker $\boldsymbol{B}(z)$ for positive og negative verdier av z?

c) Bruk Biot–Savarts lov,

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\boldsymbol{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad \left(= \quad \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \quad \right)$$

til å vise at

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

d) Bestem $B(z)$ i stor avstand fra strømsløyfa (dvs: til ledende orden når $z \gg R$) og uttrykk svaret ved hjelp av sløyfas *magnetiske dipolmoment* $m = |\boldsymbol{m}|$.

Magnetisk dipolmoment $\boldsymbol{m}$ for ei plan, lukket strømsløyfe som omslutter et areal A er pr definisjon

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A} = IA\,\hat{n}$$

der $\hat{n}$ er enhetsvektoren normalt til den plane omsluttede flaten. Magnetisk dipolmoment er altså en *vektor* (på samme måte som elektrisk dipolmoment $\boldsymbol{p}$). Positiv retning på $\boldsymbol{m}$ er definert ved hjelp av høyrehåndsregelen: Fire fingre i strømmens retning gir tommelen i samme retning som $\boldsymbol{m}$.

Kommentarer:
Merk at ulike lærebøker bruker litt ulik notasjon her: Noen kaller det "magnetisk dipolmoment", andre bare "magnetisk moment". Noen bruker symbolet $\boldsymbol{\mu}$, andre bruker $\boldsymbol{m}$. Uansett, det er samme fysiske størrelse det dreier seg om! Vi velger å bruke symbolet $\boldsymbol{m}$ og kaller det magnetisk dipolmoment, i tråd med f.eks. den norske boka (LHL) og Griffiths.

Det er kanskje også på sin plass å nevne at både elektrisk og magnetisk dipolmoment har en mer *generell* definisjon enn det vi bruker i dette kurset. (Verden består jo tross alt ikke bare av parvise punktladninger med motsatt fortegn og plane strømsløyfer...!) Har vi en romladningstetthet $\rho(\boldsymbol{r})$, er elektrisk dipolmoment $\boldsymbol{p}$ pr definisjon

$$\boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})\, d^3r$$

Og har vi en strømfordeling gitt ved strømtettheten $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$, er magnetisk dipolmoment $\boldsymbol{m}$ pr definisjon

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\, d^3r$$

Her går integralet over "hele rommet", dvs der henholdsvis ρ og $\boldsymbol{j}$ er forskjellig fra null. For *spesialtilfellene* som vi ser på i dette kurset, nemlig parvise punktladninger $\pm q$ i innbyrdes avstand beskrevet ved vektoren $\boldsymbol{d}$, og plane strømsløyfer med stasjonær strøm I som omslutter et areal beskrevet ved vektoren (noen ganger kalt "vektorarealet") $\boldsymbol{A} = A\ \hat{n}$, reduserer disse generelle definisjonene seg nettopp til

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

og

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$

NB: De generelle definisjonene av $\boldsymbol{p}$ og $\boldsymbol{m}$ er *ikke* pensum i dette kurset!