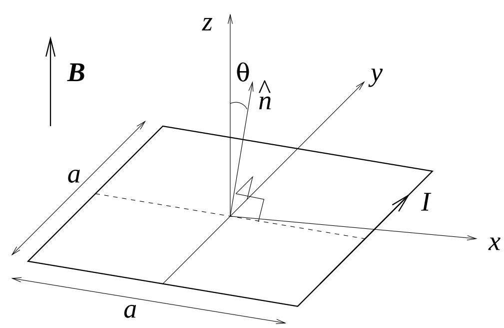
**Institutt for fysikk, NTNU**
**TFY4150/FY1303/SIF4012/MNFFY103: Elektrisitet og magnetisme**
**Høst 2003**

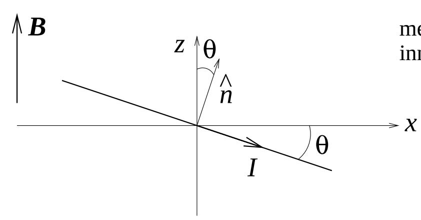
# Øving 13

Veiledning: Mandag 10. november
Innleveringsfrist: Torsdag 13. november kl. 1200

*Oppgave 1*

I forelesningene viste vi at atomer kan oppfattes som små strømsløyfer, dvs som små magnetiske dipoler med magnetisk dipolmoment $\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$ der strømmen $I$ går i en bane som omslutter et (plant) areal $A$. ("Vektorarealet" er da $\boldsymbol{A} = A\,\hat{n}$, der $\hat{n}$ er en enhetsvektor normalt til den omsluttede flaten, med positiv retning bestemt ved høyrehåndsregelen.)
Her skal vi bruke ei *kvadratisk* strømsløyfe som modell for en slik atomær magnetisk dipol og se nærmere på hvordan den vil oppføre seg i et magnetfelt $\boldsymbol{B}$. (Vi kunne også ha brukt ei *sirkulær* strømsløyfe, men den kvadratiske er litt enklere å regne på.)
Strømsløyfa har sidekanter med lengde $a$ og fører altså en strøm $I$. Den er plassert i et *homogent* magnetfelt $\boldsymbol{B} = B\,\hat{z}$ og kan rotere fritt omkring $y$-aksen, som her går gjennom strømsløyfas sentrum som vist i figuren:




Orienteringen av strømsløyfa er definert ved vinkelen $\theta$ mellom $z$-aksen og flatenormalen $\hat{n}$. (Positiv $\theta$ *med* klokka, som vist i figuren.)

*a*) Hva blir strømsløyfas magnetiske dipolmoment $\boldsymbol{m}$? Hva blir den totale kraften fra $\boldsymbol{B}$ på strømsløyfa?

*b*) Beregn dreiemomentet $\boldsymbol{\tau}$ på sløyfa omkring $y$-aksen og vis at det kan uttrykkes på formen $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$.

[Tips: Finn kraften på hver av de fire rette lederstykkene og bruk at dreiemoment = "arm ganger kraft".]

*c*) Bestem den potensielle energien $U(\theta)$ til en slik magnetisk dipol i feltet $\boldsymbol{B}$. Skisser $U(\theta)$. Hva slags orientering av dipolen i forhold til $\boldsymbol{B}$ representerer henholdsvis en stabil og en ustabil likevekt?

*d*) I jern har hvert atom et magnetisk dipolmoment $\boldsymbol{m}_{\mathrm{Fe}}$ som dannes av to parallelle elektronspinn, slik at $m_{\mathrm{Fe}} = 2\mu_B$. Her er $\mu_B = e\hbar/2m_e$ det magnetiske dipolmomentet for ett elektronspinn, det såkalte Bohr-magnetonet, med verdi $9.27 \cdot 10^{-24}$ Am$^2$.
Hva blir da den maksimale tettheten av magnetisk dipolmoment (dvs: magnetisk dipolmoment pr volumenhet) i jern?
[Kommentar: Magnetisk dipolmoment pr volumenhet er, pr definisjon, hva vi skal kalle *magnetisering*. I elektrostatikken innførte vi *polarisering*, som pr definisjon er elektrisk dipolmoment pr volumenhet. Mer om magnetisme og magnetisering i forelesningene!]

Oppgitt: Molar masse, jern: 55.9 g/mol. Massetetthet, jern: 7.9 g/cm$^3$. 1 mol = $6.02 \cdot 10^{23}$.

*Oppgave 2*

I forelesningene brukte vi Amperes lov (på integralform) til å bestemme magnetfeltet $\boldsymbol{B}(r)$ fra en rett, uendelig lang strømførende leder med radius $R$ og med strømmen $I_0$ jevnt fordelt over lederens tverrsnitt:

$$\boldsymbol{B}(r) = \begin{cases} (\mu_0 I_0 r/2\pi R^2)\hat{\phi} & r < R \\ (\mu_0 I_0/2\pi r)\hat{\phi} & r > R \end{cases}$$

Her er $r$ avstanden fra sentrum av lederen og $\hat{\phi}$ er enhetsvektoren normalt på $\hat{r}$, tangentielt til en sirkulær bane konsentrisk omkring strømlederen.

La lederen ligge langs $z$-aksen slik at strømmen $I_0$ går i positiv $z$-retning. Beregn *curl* til magnetfeltet, dvs $\nabla \times \boldsymbol{B}$, og vis at Amperes lov på differensialform,

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j},$$

gir nettopp den strømtettheten $\boldsymbol{j}$ som vi startet med da vi beregnet $\boldsymbol{B}$.
Du kan velge om du vil bruke kartesiske koordinater $(x, y, z)$ eller sylinderkoordinater $(r, \phi, z)$.

Oppgitt: I sylinderkoordinater er $\nabla \times \boldsymbol{B}$ en vektor med komponenter

$$\begin{aligned} (\nabla \times \boldsymbol{B})_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \\ (\nabla \times \boldsymbol{B})_\phi &= \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \\ (\nabla \times \boldsymbol{B})_z &= \frac{1}{r}\frac{\partial (r B_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial B_r}{\partial \phi} \end{aligned}$$

langs henholdsvis $\hat{r}$, $\hat{\phi}$ og $\hat{z}$. Curl-operatoren i kartesiske koordinater husker du kanskje? Hvis ikke finner du den i Rottmann.

*Oppgave 3*

Bruk Gauss' lov for magnetfeltet $\boldsymbol{B}$ på differensialform,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0,$$

til å avgjøre hvilket magnetfelt, *a)* eller *b)*, som er fysisk mulig og hvilket som ikke er det. For det fysisk mulige $\boldsymbol{B}$-feltet, bestem tilhørende strømtetthet $\boldsymbol{j}$ ved hjelp av Amperes lov på differensialform (se oppgave 2). Visualiser strømtettheten på $x$-aksen ved hjelp av "strømlinjer" for $\boldsymbol{j}$.

*a)* $\boldsymbol{B} = k\,(x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z})$

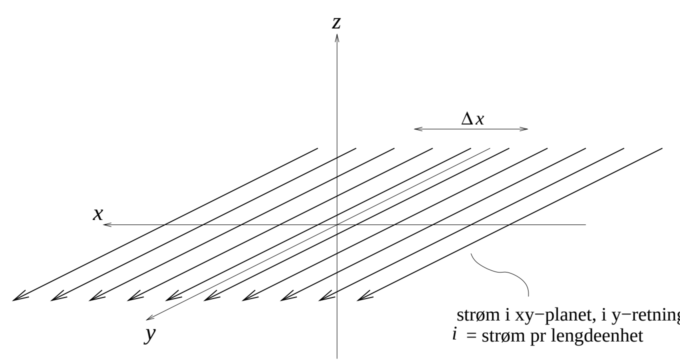
*b)* $\boldsymbol{B} = k\,(xy\,\hat{x} - xy\,\hat{y} + z(x-y)\,\hat{z})$

*Oppgave 4*

Vis, ved hjelp av Amperes lov (på integralform), at magnetfeltet $\boldsymbol{B}$ fra en uniform "overflatestrøm" $\boldsymbol{i} = i\,\hat{y}$ som "flyter" i (hele) $xy$-planet i positiv $y$-retning er

$$\boldsymbol{B} = \begin{cases} -(\mu_0 i/2)\,\hat{x} & \text{for } z < 0 \\ +(\mu_0 i/2)\,\hat{x} & \text{for } z > 0 \end{cases}$$

(Altså uavhengig av avstanden til $xy$-planet, jfr elektrisk felt fra uendelig stort uniformt ladet plan.) Her er $i$ strømmen *pr lengdeenhet* av $x$-retningen. Med andre ord, på en "stripe" med bredde $\Delta x$ går det en strøm $\Delta I = i \cdot \Delta x$.




Tips:

- Det er altså oppgitt at både $y$- og $z$-komponenten av $\boldsymbol{B}$ er lik null. Bruk gjerne likevel litt tid på å overbevise deg om at sånn *må* det være. En slik "kartlegging" av symmetrien i problemet er helt *essensiell* for å kunne dra nytte av Amperes lov. Som regel må en da et lite øyeblikk tilbake til Biot-Savarts lov og vurdere konsekvensene av at "strømelementer" $I\,d\boldsymbol{l}$ gir bidrag $d\boldsymbol{B} \sim I\,d\boldsymbol{l} \times \hat{r}$ til det totale magnetfeltet.

- Hvis du etterhvert greier å overbevise deg om at en rektangulær Amperekurve med flatenormal i strømmens retning er et fornuftig valg, ja da er du antagelig på rett spor!