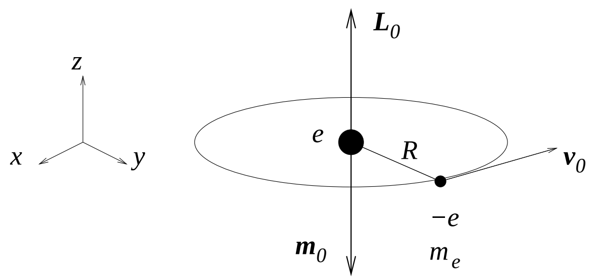
Institutt for fysikk, NTNU
TFY4150/FY1303/SIF4012/MNFFY103: Elektrisitet og magnetisme
Høst 2003

Øving 14

Veiledning: Mandag 17. november
Innleveringsfrist: Torsdag 20. november kl. 1200

Oppgave 1

I denne oppgaven skal vi med utgangspunkt i en klassisk atommodell se nærmere på hvordan et ytre magnetfelt $\boldsymbol{B}$ vil påvirke elektronets banebevegelse rundt atomkjernen. En slik *diamagnetisk* respons får vi i alle atomer. Her kan vi for enkelhets skyld ha et hydrogenatom i tankene, med ett elektron med ladning $-e$ i sirkulær bane (i xy-planet) med radius R rundt en kjerne med ladning e.

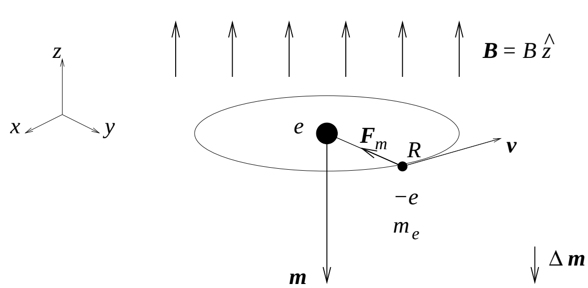


a) Uten et ytre magnetfelt tilstede er elektronets hastighet v_0. Vis at uniform sirkelbevegelse i Coulombfeltet fra kjernen da resulterer i en baneradius

$$R = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e v_0^2}$$

Hva blir elektronets banedreieimpuls $\boldsymbol{L}_0$ og magnetiske dipolmoment $\boldsymbol{m}_0$? (Vi ser her bort fra elektronets indre dreieimpuls, dets *spinn*.)

b) Vi skrur nå på et magnetfelt $\boldsymbol{B}$, for enkelhets skyld rettet normalt på elektronets sirkulære bane.



Elektronet påvirkes da i tillegg av en magnetisk kraft $\boldsymbol{F}_m = -e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ slik at bevegelsesligningen endres. Resultatet blir en endret sammenheng mellom elektronets hastighet v og banens radius

R. Anta at magnetfeltet ikke endrer banens radius R og bestem hastigheten v. Bestem også det magnetiske dipolmomentet $\boldsymbol{m}$ og vis at *endringen*

$$\Delta \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_0$$

alltid vil være *motsatt rettet* $\boldsymbol{B}$, uansett om $\boldsymbol{B}$ peker "opp" eller "ned" i forhold til elektronets omløpsretning.

Kommentarer:

1. Vi har tidligere konkludert med at et statisk magnetfelt aldri utfører noe arbeid på en ladning i bevegelse ettersom $\boldsymbol{F}_m \perp \boldsymbol{v}$. Et statisk magnetfelt kan altså ikke endre ladningens hastighet (i absoluttverdi), tilsynelatende i konflikt med det vi har funnet ovenfor. Poenget er imidlertid at vi starter med $B = 0$ og *skrur på* et magnetfelt. Dermed har vi ikke hele tiden et statisk magnetfelt, men et felt som i løpet av en viss tid må endre seg fra null til sin endelige verdi. Som vi skal se i forelesningene, vil et tidsavhengig magnetfelt indusere et elektrisk felt (Faradays induksjonslov), og et elektrisk felt kan som kjent endre hastigheten til et elektron.

2. Legg merke til at fortegnet på den diamagnetiske responsen er i tråd med *Lenz' lov*: Systemets respons er slik at den påtrykte endringen *motvirkes*.

3. Strengt tatt er det nødvendig med en *kvantemekanisk* beskrivelse for å forklare diamagnetisme "skikkelig". Faktisk er det et *teorem* i statistisk fysikk som sier at for et system av klassiske ladete partikler i termisk likevekt i et ytre magnetfelt er det induserte magnetiske dipolmomentet *eksakt lik null* (Bohr - van Leeuwens teorem). Med andre ord: Diamagnetisme er en ren kvantemekanisk effekt! Likevel gir den enkle klassiske modellen med ett atom et brukbart kvalitativt bilde av effekten.

Oppgave 2

Bruk de to Maxwell-ligningene

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I_{\text{in}}$$

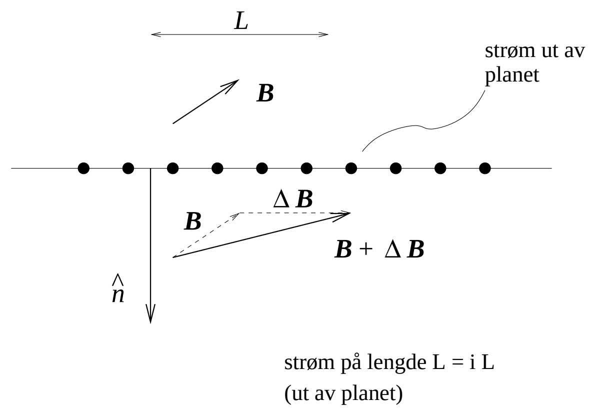
og

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

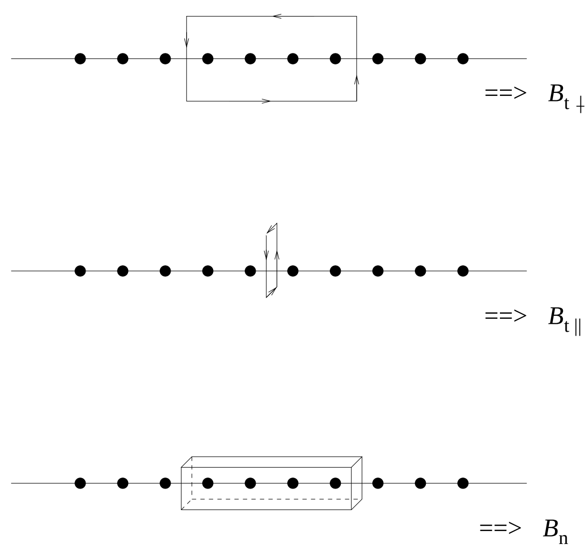
til å vise at diskontinuiteten ("spranget") i magnetfeltet $\boldsymbol{B}$ når vi krysser et strømførende plan med strøm pr lengdeenhet $\boldsymbol{i}$ er

$$\Delta \boldsymbol{B} = \mu_0 \, \boldsymbol{i} \times \hat{n}$$

Her er $\hat{n}$ en enhetsvektor normalt til planet, med retning slik at $\Delta \boldsymbol{B}$ i figuren nedenfor blir en vektor mot høyre:



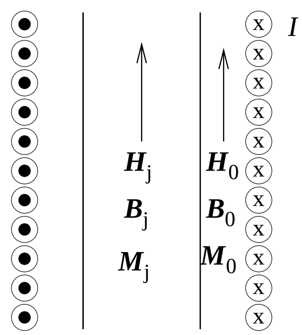
Tips: Bruk Gauss' lov for $\boldsymbol{B}$ til å vise at B_n, dvs komponenten av $\boldsymbol{B}$ normalt til planet, er kontinuerlig når vi krysser det strømførende planet. En fornuftig gaussflate er en fyrstikkeske med to av sideflatene parallelt med planet, beliggende på hver sin side av planet.
Bruk deretter Amperes lov til å vise at $B_{t||}$ også er kontinuerlig ved kryssing av planet, mens $B_{t\perp}$ er diskontinuerlig med et sprang $\mu_0 i$. Her betrakter vi komponenten B_t av $\boldsymbol{B}$ tangentielt til planet. Denne kan igjen dekomponeres i en komponent parallelt med strømretningen, $B_{t||}$, og en komponent normalt til strømretningen, $B_{t\perp}$. Fornuftige amperekurver for denne delen av oppgaven er rektangler beliggende symmetrisk i forhold til det strømførende planet (jfr oppgave 4 i øving 13), med ulik orientering i forhold til strømretningen, avhengig av om vi skal ende opp med en grenseflatebetingelse for $B_{t||}$ eller $B_{t\perp}$. Følgende figur kan muligens være til hjelp:



Kontroller til slutt at de tre grenseflatebetingelsene du har endt opp med, for hhv B_n, $B_{t||}$ og $B_{t\perp}$, kan sammenfattes i ligningen for $\Delta\boldsymbol{B}$.

Kommentar: Gitt at vi har løst oppgave 4 i øving 13, dvs magnetfelt fra uendelig stort plan med uniform strøm, er egentlig denne oppgaven også løst: Det totale magnetfeltet ved en slik grenseflate må være lik magnetfeltet fra en liten bit av grenseflaten omkring der vi krysser pluss magnetfeltet fra "resten av verden" (husk: superposisjonsprinsippet). Magnetfeltet fra resten av verden må være kontinuerlig idet vi krysser grenseflaten (fordi alle strømelementer som bidrar til dette "resten-av-verden-feltet" ligger langt unna i forhold til den infinitesimale veien vi må gå for faktisk å krysse flaten). Følgelig må en eventuell diskontinuitet i det totale feltet være lik diskontinuiteten i feltet fra den lille biten omkring krysningspunktet. Denne lille biten ser ut som en uendelig stor, plan flate idet vi krysser flaten, for vi kan starte og ende vår flatekrysning så nær flaten som vi bare vil. Men da må feltet fra den lille biten av grenseflaten bli det samme som vi fant i oppgave 4 i øving 13, dvs $\mu_0 i/2$, med motsatt retning på hver side av grenseflaten, tangentielt til flaten og normalt på strømretningen. Følgelig med diskontinuitet lik $\mu_0 i$ i absoluttverdi og retning konsistent med ligningen for $\Delta \boldsymbol{B}$.

Oppgave 3



En sylinderformet jernstav med relativ permeabilitet $\mu_r = 2000$ er plassert koaksialt inne i en spole, men fyller bare delvis volumet inne i spolen. Spolen har en viklingstetthet $n = 2000\ \mathrm{m}^{-1}$ og strømmen i spoletråden er $I = 3$ A. Vi antar at både spolen og jernstaven er så lange at vi kan se bort fra randeffekter.
Anta i første omgang at vi har lineær respons i jernstaven, dvs $\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H}$, og bestem $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ og $\boldsymbol{M}$ inne i spolen, både inne i (indeks j) og utenfor (indeks 0) jernstaven. (Husk at H-feltet bestemmes av "fri" strøm, mens B bestemmes av total strøm.)
Diskuter den beregnede verdien på M_j inne i jernstaven i lys av *metningsmagnetiseringen* i jern, dvs den maksimalt oppnåelige magnetiseringen, som du regnet ut i oppgave 1d i øving 13. Beregn deretter korrigert (maksimal) verdi for B_j.

Oppgitt:

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) = \mu_r \mu_0 \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H}$$

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} = (\mu_r - 1) \boldsymbol{H}$$

(Siste ligning er bare gyldig når vi har lineær respons.)

Et par tallsvar: $B_j = 15$ T ("ukorrigert"), $B_j = 2$ T ("korrigert").