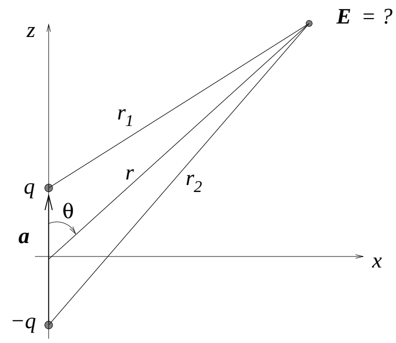
Institutt for fysikk, NTNU
TFY4150/FY1303/SIF4012/MNFFY103: Elektrisitet og magnetisme
Høst 2003

Øving 4

Veiledning: Mandag 8. september
Innleveringsfrist: Torsdag 11. september kl. 1200

Oppgave 1



I oppgave 2 i øving 3 betraktet vi en elektrisk dipol, bestående av to punktladninger $\pm q$ lokalisert på z-aksen i $z = \pm a/2$. Vi viste at potensialet V i stor avstand ($r \gg a$) fra dipolen er tilnærmet lik

$$V(r,\theta) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Her er r avstanden fra origo, dvs dipolens midtpunkt, θ er vinkelen mellom z-aksen og $\boldsymbol{r}$, og $p = |\boldsymbol{p}| = qa$ er dipolens elektriske dipolmoment.

a) Ta utgangspunkt i uttrykket for $V(r,\theta)$ og bestem det elektriske feltet $\boldsymbol{E}(r,\theta) = E_r\hat{r} + E_\theta\hat{\theta}$ i stor avstand fra dipolen.
Det oppgis at gradientoperatoren i kulekoordinater er

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

[Fasit: $E_r = p\cos\theta/2\pi\varepsilon_0 r^3$, $E_\theta = p\sin\theta/4\pi\varepsilon_0 r^3$.]
Kontroller om resultatet virker rimelig for $\theta = 0$ og for $\theta = \pi/2$. Hva med $r = 0$?

b) På grunn av rotasjonssymmetrien omkring z-aksen kan vi f.eks. anta at vi befinner oss i xz-planet. Bestem det elektriske feltet $\boldsymbol{E}(x,z) = E_x\hat{x} + E_z\hat{z}$ uttrykt i kartesiske koordinater for $r \gg a$. Tips: Ta utgangspunkt i uttrykkene for E_r og E_θ i punkt *a*). Tegn opp en figur og finn sammenhengen mellom koordinatene (x,z) og (r,θ), og feltkomponentene E_x, E_z og E_r, E_θ.
[Fasit: $E_x = 3pxz/4\pi\varepsilon_0(x^2+z^2)^{5/2}$, $E_z = p(2z^2 - x^2)/4\pi\varepsilon_0(x^2+z^2)^{5/2}$.]

c) Bestem også $\boldsymbol{E}(x,z)$ ved først å skrive om $V(r,\theta)$ til $V(x,z)$, og deretter anvende gradientoperatoren i kartesiske koordinater.

Oppgave 2

I kartesiske koordinater er et infinitesimalt (differensielt) linjeelement (veielement) gitt ved $d\boldsymbol{l} = dx\ \hat{x} + dy\ \hat{y} + dz\ \hat{z}$. Et infinitesimalt flateelement $d\boldsymbol{A}$ er $dy\ dz\ \hat{x}$, $dx\ dz\ \hat{y}$ og $dx\ dy\ \hat{z}$ når flatenormalen peker i henholdsvis x-, y- og z-retning. Et infinitesimalt volumelement er $dV = dx\ dy\ dz$.

a) Vis at i kulekoordinater (r, θ, ϕ) er de tilsvarende størrelser

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{l} &= dr\ \hat{r} + r\ d\theta\ \hat{\theta} + r \sin\theta\ d\phi\ \hat{\phi} \\
d\boldsymbol{A}_r &= r^2 \sin\theta\ d\theta\ d\phi\ \hat{r} \\
d\boldsymbol{A}_\theta &= r\ dr \sin\theta\ d\phi\ \hat{\theta} \\
d\boldsymbol{A}_\phi &= r\ dr\ d\theta\ \hat{\phi} \\
dV &= r^2\ dr \sin\theta\ d\theta\ d\phi
\end{aligned}$$

Tips: Tegn opp et infinitesimalt volumelement som avgrenses av flatene r og $r + dr$, θ og $\theta + d\theta$, ϕ og $\phi + d\phi$. (Se figur i ukentlig sammendrag, uke 34. NB: I denne figuren er de tre ortogonale enhetsvektorene $\hat{r}, \hat{\theta}$ og $\hat{\phi}$ "flyttet" vekk fra det aktuelle volumelementet. Hensikten var å unngå en altfor rotete figur, men resultatet er kanskje misvisende: Disse tre enhetsvektorene er *ikke* faste vektorer i rommet, de er avhengige av *hvor* i rommet vi er, og *endrer retning* ettersom vi flytter oss rundt. Eksempel: I et punkt på y-aksen ($y > 0$) er $\hat{r} = \hat{y}$ mens i et punkt på z-aksen ($z > 0$), derimot, er $\hat{r} = \hat{z}$.)

b) Vis på grunnlag av formlene over at ei kule med radius R har volum $4\pi R^3/3$ og overflateareal $4\pi R^2$.

Kommentar: Omkretsen av en sirkel med radius R er $2\pi R$. Sirkelen utspenner en vinkel på 2π (radianer). Disse resultatene kommer vi fram til ved å starte med et infinitesimalt bueelement $dl = R\ d\theta$ og integrere fra 0 til 2π. Tilsvarende har en kuleflate med radius R et areal $4\pi R^2$. Kuleflaten utspenner en *romvinkel* på 4π (steradianer). Her er utgangspunktet et infinitesimalt *flateelement* $dA_R = R^2\ d\Omega$, der $d\Omega = \sin\theta\ d\theta\ d\phi$ er et infinitesimalt *romvinkelelement*. Integrasjon over θ og ϕ gir deretter kuleflatens totale areal A, evt. totale romvinkel Ω. Vi kommer straks tilbake til dette i forelesningene, i forbindelse med *Gauss lov*.

Oppgave 3 (multiple choice)
(Antatt tidsforbruk: ca 10 min. + evt. tid til å bla i lærebok eller notater.)

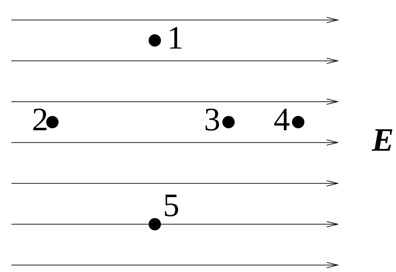
Noe av dette (dvs ikke alt!) vil du få bruk for nedenfor: $1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ Nm^2/C^2, $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg

a) Potensialforskjellen mellom katoden og skjermen i et TV-apparat er 25 kV. Dersom vi antar at et elektron forlater katoden med null hastighet, hvor stor er da hastigheten umiddelbart før det treffer skjermen?

- A $4.2 \cdot 10^{15}$ m/s
- B $8.8 \cdot 10^{15}$ m/s
- C $3.8 \cdot 10^{7}$ m/s
- D $6.6 \cdot 10^{7}$ m/s
- E $9.4 \cdot 10^{7}$ m/s

b) En berylliumkjerne med ladning $4e$ og masse $9m_p$ og en α-partikkel (dvs en heliumkjerne) med ladning $2e$ og masse $4m_p$ er i ro. De to partiklene kan gis like stor kinetisk energi ved å

- A akselerere dem gjennom en like stor potensialforskjell.
- B akselerere α-partikkelen gjennom V volt og berylliumkjernen gjennom $V/2$ volt.
- C akselerere α-partikkelen gjennom V volt og berylliumkjernen gjennom $9V/8$ volt.
- D akselerere α-partikkelen gjennom V volt og berylliumkjernen gjennom $9V/4$ volt.
- E akselerere α-partikkelen gjennom V volt og berylliumkjernen gjennom $9V/2$ volt.



Figuren illustrerer et uniformt elektrisk felt $\boldsymbol{E}$.

c) Hvilke punkter i figuren er på samme potensial?

- A 2 og 5
- B 2, 3 og 4
- C 1 og 4
- D 1 og 5
- E 2 og 4

d) Hvilket punkt i figuren er på høyest potensial?

- A 1
- B 2
- C 3
- D 4
- E 5

e) Hvilket punkt i figuren er på lavest potensial?

- A 1
- B 2
- C 3
- D 4
- E 5