Institutt for fysikk, NTNU
TFY4150/FY1303/SIF4012/MNFFY103: Elektrisitet og magnetisme
Høst 2003

Øving 6

Veiledning: Mandag 22. september
Innleveringsfrist: Torsdag 25. september kl. 1200

Mye skrik men ikke fullt så mye ull. Dvs: Lang oppgavetekst men ikke så veeeldig mye regning!

Oppgave 1

Det største elektriske feltet som kan opprettholdes i luft er ca 3 MV/m. Større verdier gir såkalt coronautladning (dvs overslag). I forelesningene har vi vist at ei metallkule vil ha all nettoladning samlet på overflaten. Vi har også vist at det elektriske feltet ved overflaten er $E = \sigma/\varepsilon_0$, der σ er overflateladningstettheten.

a) Hva er da den maksimale overflateladningstettheten ei metalloverflate kan holde på uten at vi får overslag?

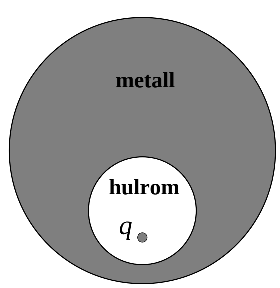
b) Hva er den minste radien ei metallkule kan ha for å holde på en ladning 1 C?
[Riktig svar er enten 25 nm, 1.5 mm, 6.6 cm, 54 m eller 2.3 km]

c) Et typisk metall består av atomer ordnet i en krystallstruktur med en avstand på ca 0.3 nm mellom nærmeste naboatomer. Hva er midlere antall overflateatomer pr m^2? Anta at overflateatomene er ordnet i et regulært *kvadratisk* gitter. [Ekstra: Blir svaret det samme dersom overflateatomene er ordnet i et regulært *triangulært* gitter?]

d) Overflateladningen i punkt a) befinner seg på metallet beskrevet i punkt c). Du kan anta at all nettoladning er fordelt kun i det ytterste atomlaget på overflaten. Hvor stor andel av atomene i dette laget har da fått ett ekstra elektron?
[Riktig svar er enten $3.3 \cdot 10^{-9}$, $1.5 \cdot 10^{-5}$, $4.3 \cdot 10^{-3}$ eller 0.17]

Oppgave 2

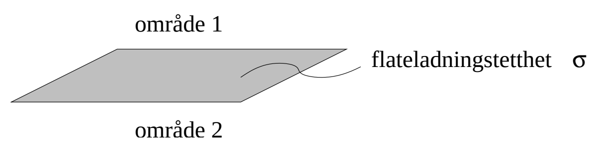
Figuren nedenfor viser et snitt gjennom sentrum av ei metallkule med et kuleformet (men ikke konsentrisk plassert) hulrom inni. I hulrommet er det en positiv punktladning q (plassert i snittet gjennom sentrum av kuleflatene, men ikke i sentrum av hulrommet). Metallkula er ellers elektrisk nøytral slik at hele systemets nettoladning er q. Punktladningen tenkes holdt fast i den angitte posisjonen.



Hva kan du si om fordelingen av (fri) ladning i metallkula når vi har elektrostatisk likevekt? [Tips 1: Hva er det elektriske feltet inne i metallet? Tips 2: Anvend Gauss' lov på integralform i din argumentasjon.]
Skisser feltlinjer for det elektriske feltet $\boldsymbol{E}$.
Kan du tenke deg hva $\boldsymbol{E}$ blir utenfor kula? [Svaret er ganske enkelt, men begrunnelsen for svaret er kanskje ikke like enkel?]

Oppgave 3

Vi skal her se nærmere på hvordan det elektriske feltet "oppfører seg" når vi krysser en *grenseflate* med ladning σ pr flateenhet. Med grenseflate mener vi ikke annet enn en flate som deler rommet i områdene 1 ("over") og 2 ("under"):



Oppgaven går i korthet ut på å vise at den elektriske feltstyrken er *diskontinuerlig* når vi krysser en slik grenseflate med elektrisk ladning:

$$\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n} \qquad (*)$$

Her er $\boldsymbol{E}_1$ feltet i område 1 like over flaten, $\boldsymbol{E}_2$ tilsvarende i område 2 like under flaten, mens $\hat{n}$ er en flatenormal (enhetsvektor) med retning oppover.

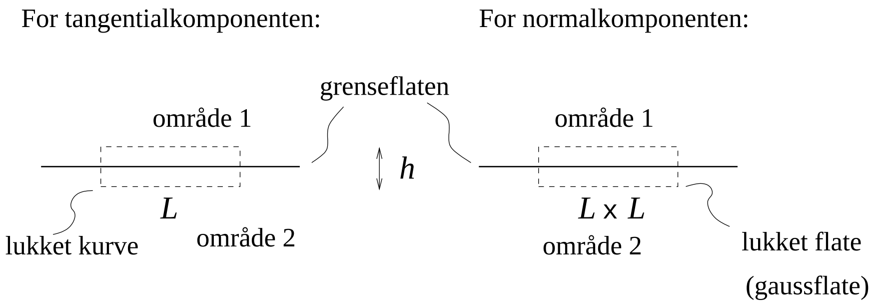
Kommentarer og tips:
Dette kan være et flatt plan, men det kan f.eks. også være en liten bit av en kuleflate: Er vi tilstrekkelig nær en kuleflate, ser også den flat ut. (Tenk på jordkloden!)
Vi tenker oss dessuten at det ikke er noe netto ladning "like over" eller "like under" den angitte flaten. (Men "andre steder" kan det godt være netto ladning.) Det betyr at vi ser en *diskontinuitet* i elektrisk ladning når vi "spaserer" fra område 2 gjennom flaten og inn i område 1. (Men *i flaten* har vi en kontinuerlig flateladning σ.)
Du ser at ligningen $(*)$ er en kompakt måte å uttrykke at *tangentialkomponenten* av $\boldsymbol{E}$ er kontinuerlig,

$$E_1^{||} - E_2^{||} = 0,$$

mens *normalkomponenten* er diskontinuerlig,

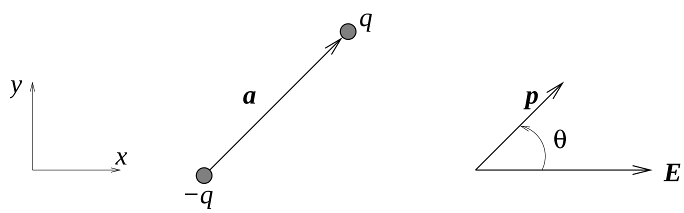
$$E_1^{\perp} - E_2^{\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

når vi krysser grenseflaten. Bruk de to Maxwell-ligningene (på integralform), $\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$ og $\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q_{\text{in}}/\varepsilon_0$, for det elektrostatiske feltet til å utlede de oppgitte grenseflatebetingelsene for henholdsvis $E^{||}$ og $E^{\perp}$. Fornuftig valg av lukket integrasjonskurve og -flate ("gaussboks") vil være som angitt i figuren nedenfor, henholdsvis en rektangulær kurve med sidekanter h og L og en "pilleeske" med sidekanter h, L og L. Begge "omslutter" en bit av grenseflaten. Du lar så L være "liten" men endelig (dvs så liten at feltstyrken kan antas å være konstant over hele lengden L, eventuelt over hele flaten $L \times L$), mens du lar høyden $h \to 0$.



Oppgave 4 ($\simeq$ oppgave 3, kontinuasjonseksamen 15. august 2003)

En elektrisk dipol består av to punktladninger q og $-q$ med en (fast) innbyrdes avstand a. Dipolen er plassert i et homogent "ytre" elektrostatisk felt $\boldsymbol{E} = E\hat{x}$. Anta at dipolen ligger i xy-planet og slik at vektoren $\boldsymbol{a}$ fra $-q$ til q, og dermed også dipolmomentet $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{a}$, danner en vinkel θ med $\boldsymbol{E}$. Vi regner *positiv θ mot urviseren*, fra $\boldsymbol{E}$ til $\boldsymbol{p}$, som vist i figuren.



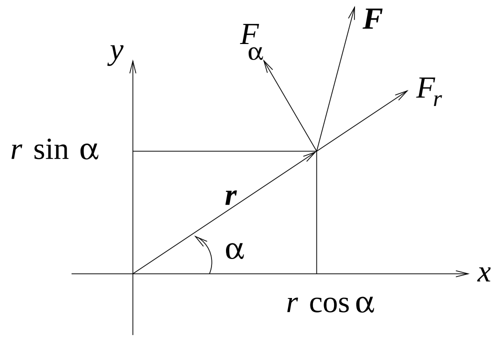
a) Hva blir den totale kraften (fra det ytre feltet $\boldsymbol{E}$) på dipolen?

b) Fra mekanikken husker vi at *dreiemomentet* $\boldsymbol{\tau}$ omkring en bestemt akse er definert som $\boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$, der $\boldsymbol{r}_i$ er "armen" fra aksen og ut til posisjonen der kraften $\boldsymbol{F}_i$ angriper.
Vis at for den elektriske dipolen i det homogene feltet blir dreiemomentet omkring aksen som går normalt gjennom dipolens midtpunkt

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E} = -pE \sin\theta \; \hat{z}$$

c) Til slutt skal du finne et uttrykk for den potensielle energien $U(\theta)$ til den elektriske dipolen ovenfor. Skisser også $U(\theta)$. Hvilken orientering av dipolen i forhold til $\boldsymbol{E}$ representerer en stabil likevekt?

Til hjelp på punkt *c*):
La oss for enkelhets skyld holde oss i xy-planet. En kraft $\boldsymbol{F} = F_x \; \hat{x} + F_y \; \hat{y} = F_r \; \hat{r} + F_\alpha \; \hat{\alpha}$ som angriper i en posisjon $\boldsymbol{r} = r\cos\alpha \; \hat{x} + r \sin\alpha \; \hat{y}$ vil da gi et dreiemoment $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ omkring z-aksen:



Vi vet dessuten at kraften $\boldsymbol{F}$ kan avledes fra den potensielle energien U ved hjelp av gradient-operatoren: $\boldsymbol{F} = -\nabla U$. I polarkoordinater (r, α) har vi

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\alpha}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \alpha}$$

Da klarer du kanskje å vise at τ $(= |\boldsymbol{\tau}|)$ $= -\partial U/\partial \alpha$, og i neste omgang hvordan U i vårt tilfelle avhenger av vinkelen mellom $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{p}$.