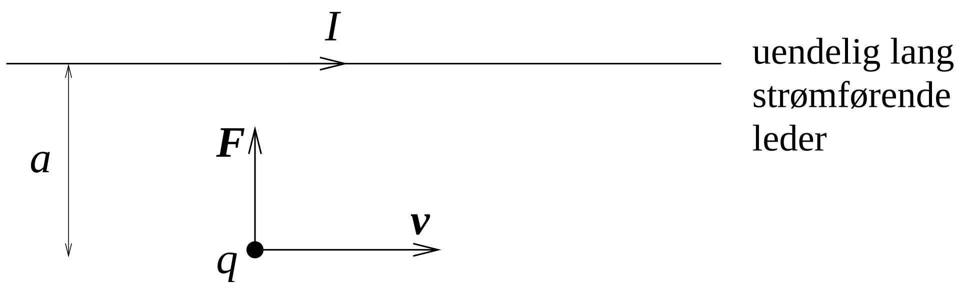
Institutt for fysikk, NTNU
TFY4150/FY1303/SIF4012/MNFFY103: Elektrisitet og magnetisme
Høst 2003

MAGNETISME SOM RELATIVISTISK FENOMEN

(orienteringsstoff; ikke eksamensrelevant)

Vi gjør et eksperiment:



... og måler en kraft på ladningen q:

$$F = k\frac{I}{a}qv$$

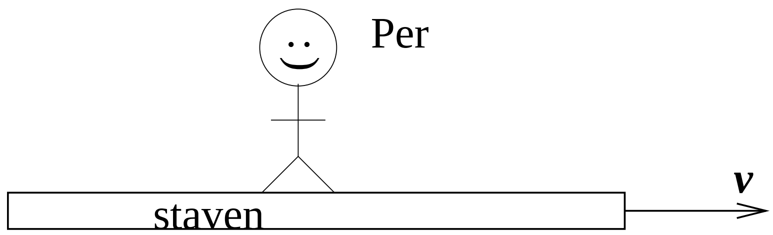
med retning mot lederen dersom $q > 0$.

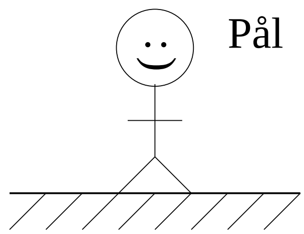
Lederen er *elektrisk nøytral* $\Rightarrow$ *null* elektrisk kraft!

Hvor kommer kraften F fra??

Løsning: Relativitetsteorien! (A. Einstein)

Lorentzkontraksjon:





$$\textit{Per}\text{: Stavens lengde er } L.$$

$$\textit{Pål}\text{: Stavens lengde er } L/\gamma < L.$$

Her er:

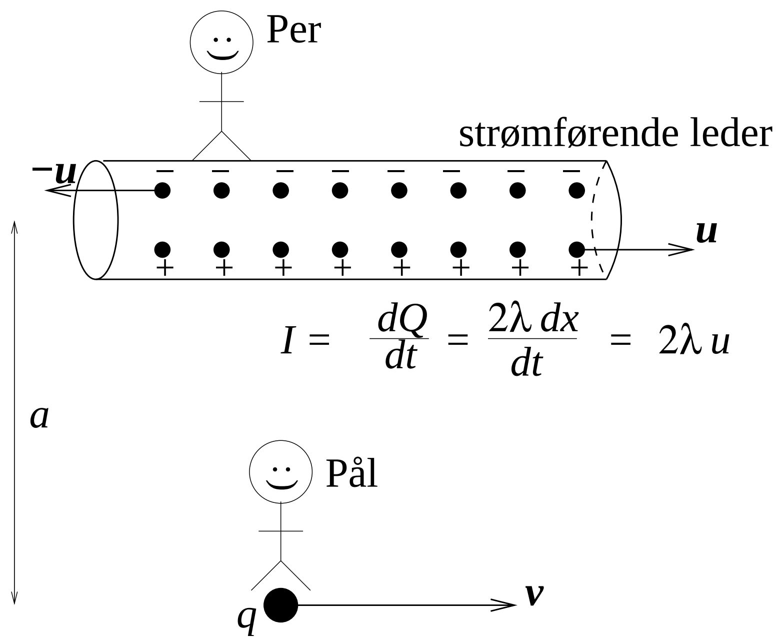
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \geq 1$$

med $c =$ lyshastigheten og $v =$ hastigheten til staven og Per (i stavens lengderetning) i forhold til Pål.

Altså:

$$\boxed{\text{Objekter i bevegelse er kortere enn når de er i ro}}$$

Konsekvenser av Lorentzkontraksjon for ladningen q i bevegelse langs den strømførende lederen:



Per: Lederen har λ negative ladninger pr lengdeenhet og λ positive ladninger pr lengdeenhet. Alt i alt er lederen elektrisk nøytral.

Pål: Lederen har λ_- negative ladninger pr lengdeenhet og λ_+ positive ladninger pr lengdeenhet. De negative ladningene har størst hastighet i forhold til meg. På grunn av størst Lorentzkontraksjon ligger derfor disse *tettere* enn de positive ladningene. Altså er $\lambda_- > \lambda_+$. Alt i alt er lederen *ikke* elektrisk nøytral; den har en netto negativ ladning $\Delta\lambda = -\lambda_- + \lambda_+ < 0$.

Dermed måler Pål en *elektrisk kraft* på ladningen q:

$$F_{\mathrm{Pal}} = F_e = qE = q \cdot \frac{\Delta\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

der vi har brukt at elektrisk felt i en avstand a fra en uendelig lang stav med ladning $\Delta\lambda$ pr lengdeenhet er (se øving 5, oppgave 3)

$$E = \frac{\Delta\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

So what? *Vi* er typisk i Pers situasjon, dvs i ro i forhold til lederen, og hvem har sagt at Per, som ser en nøytral leder, vil måle en kraft på q?

Jo, det sier Einstein, med sitt *relativitetsprinsipp*:

> Fysikkens lover gjelder i alle *inertialsystemer*, dvs i alle referansesystemer som er i ro eller i konstant hastighet.

$\Rightarrow$ Hvis Pål måler en kraft på q, *må* også Per måle en kraft på q!

I forelesningene tok vi her rett og slett en snarvei og konstaterte at

$$F_{\text{Per}} = \sqrt{1 - v^2/c^2}\; F_{\text{Pal}}$$

$$\Delta\lambda = \frac{2\lambda v u}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Den første av disse to ligningene skal vi ikke forsøke å utlede, men den uttrykker altså hvordan krefter, ifølge relativitetsteorien, *transformerer* mellom ulike referansesystemer som er i relativ bevegelse med hastighet $\boldsymbol{v}$. I vårt tilfelle er ladningen q i ro i Pål sitt referansesystem, i Per sitt referansesystem har den hastighet $\boldsymbol{v}$ (mot høyre). Hvis da Pål måler en kraft

$$\boldsymbol{F}_{\text{Pal}} = \boldsymbol{F}^{\|}_{\text{Pal}} + \boldsymbol{F}^{\perp}_{\text{Pal}}$$

der $\boldsymbol{F}^{\|}_{\text{Pal}}$ er komponenten av $\boldsymbol{F}_{\text{Pal}}$ parallelt med hastighetsvektoren $\boldsymbol{v}$ og $\boldsymbol{F}^{\perp}_{\text{Pal}}$ er komponenten av $\boldsymbol{F}_{\text{Pal}}$ normalt på hastighetsvektoren $\boldsymbol{v}$, så "kan det vises" at Per vil måle en kraft

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{\text{Per}} &= \boldsymbol{F}^{\|}_{\text{Per}} + \boldsymbol{F}^{\perp}_{\text{Per}} \\ &= \boldsymbol{F}^{\|}_{\text{Pal}} + \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{F}^{\perp}_{\text{Pal}} \end{aligned}$$

Med andre ord, en eventuell kraftkomponent parallelt med $\boldsymbol{v}$ blir den samme i de to referansesystemene (i vårt tilfelle er $F^{\|} = 0$), mens for kraftkomponenten normalt på $\boldsymbol{v}$ (og vår kraft er nettopp normalt på $\boldsymbol{v}$) har vi

$$\boldsymbol{F}^{\perp}_{\text{Per}} = \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{F}^{\perp}_{\text{Pal}} = \sqrt{1 - v^2/c^2}\; F_{\text{Pal}}$$

som konstatert ovenfor.

Den andre av de to ligningene ovenfor kan vi utlede på bakgrunn av **Einsteins regel for addisjon av relative hastigheter**.
La oss ta for oss 3 objekter A, B og C. Dersom v_{AB} er hastigheten til A relativt B og v_{BC} er hastigheten til B relativt C, da ville en nok intuitivt tenke som Galilei og si at

$$v_{AC} = v_{AB} + v_{BC}$$

må bli hastigheten til A relativt C. Tro det eller ei, men dette er faktisk ikke riktig! Og problemet oppstår i forbindelse med Einsteins 2. postulat (det 1. postulatet var relativitetsprinsippet, se ovenfor):

Lyshastigheten c i vakuum er konstant, uavhengig av
kildens eller observatørens relative hastighet.

Nå ser du problemet med Galileis addisjonsformel: Dersom $v_{AB} = c$ (dvs A er et lyssignal som beveger seg med hastighet c i forhold til B), blir $v_{AC} \neq c$ (dvs C vil påstå at hastigheten til lyssignalet A ikke er lik c)!!

Løsningen har vi med Einsteins addisjonsregel:

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB} \cdot v_{BC}/c^2}$$

Setter du nå $v_{AB} = c$, vil du også finne at $v_{AC} = c$, i samsvar med postulatet ovenfor.

Utstyrt med denne formelen kan vi nå regne ut hvor stor Lorentzkontraksjon ladningen q ser for henholdsvis de positive og de negative ladningsbærerne i den strømførende lederen.

Lederladningenes hastighet målt av Pål:

$$u_{\pm} = \frac{\pm u + (-v)}{1 + (\pm u) \cdot (-v)/c^2} = \pm \frac{u \mp v}{1 \mp uv/c^2}$$

Her er lederladningene objekt A (øvre fortegn for de positive), Pål og ladningen q er objekt C, mens Per tilsvarer objekt B. Dermed er $v_{AC} = u_{\pm} =$ lederladningenes hastighet relativt Pål og q, $v_{AB} = \pm u =$ lederladningenes hastighet relativt Per (dvs laboratoriet, der lederen ligger i ro), mens $v_{BC} = -v =$ Pers (og laboratoriets) hastighet relativt Pål (og ladningen q).

Da kan vi regne ut "Lorentzkontraksjonsfaktorene" $\gamma_\pm$ for de positive (øvre fortegn) og de negative (nedre fortegn) lederladningene, sett fra Pål og q sitt referansesystem:

$$
\begin{aligned}
\gamma_\pm &= \frac{1}{\sqrt{1-u_\pm^2/c^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(u\mp v)^2}{(1\mp uv/c^2)^2 c^2}}} \\
&= \frac{1\mp uv/c^2}{\sqrt{(1\mp uv/c^2)^2-(u\mp v)^2/c^2}} \\
&= \frac{1\mp uv/c^2}{\sqrt{1\mp 2uv/c^2+u^2v^2/c^4-u^2/c^2-v^2/c^2\pm 2uv/c^2}} \\
&= \frac{1\mp uv/c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)\cdot(1-v^2/c^2)}}
\end{aligned}
$$

Dette gjør oss i stand til å regne ut tettheten av lederladninger, observert fra Pål og q sitt referansesystem:

$$\lambda_\pm = \gamma_\pm \lambda_0$$

der (NB!) λ_0 er (antalls-)tettheten av lederladninger *målt av lederladningene selv.* Per, i ro i laboratoriet, måler antallstettheten λ for lederladningene. Ettersom disse har hastigheten u relativt Per, blir sammenhengen mellom λ og λ_0

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\lambda_0 \quad (> \lambda_0)$$

Dvs like stor Lorentzkontraksjon for positive og negative lederladninger, sett fra Pers ståsted. (Sagt på en annen måte: Fordi Per måler like stor antallstetthet for positive og negative lederladninger, og dermed en elektrisk nøytral leder, og samtidig like stor hastighet ($\pm$) u, betyr det at lederladningene selv også må måle en like stor antallstetthet λ_0, enten de nå er av det positive eller negative slaget.)

Tilbake til Pål og q, som nå altså ikke observerer en elektrisk nøytral leder, men derimot en ladet leder med ladning pr lengdeenhet

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda &= \lambda_+ - \lambda_- \\
&= \gamma_+\lambda_0 - \gamma_-\lambda_0 \\
&= (\gamma_+ - \gamma_-) \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2}\ \lambda \\
&= \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}\ \lambda}{\sqrt{(1-u^2/c^2)\cdot(1-v^2/c^2)}} \cdot \left[1 - \frac{uv}{c^2} - \left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)\right] \\
&= -\frac{2\lambda vu}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}
\end{aligned}$$

Det negative fortegnet innebærer at Pål ser en *negativt* ladet leder, noe vi allerede fant ut på side 3. Nå har vi i tillegg altså regnet ut *hvor mye* negativ ladning Pål ser på lederen.

Dermed kjenner vi elektrisk kraft målt av Pål (side 3), hvoretter vi kan regne ut magnetisk kraft målt av Per, dvs i laboratoriet:

$$\begin{aligned}
F_{\text{Per}} = F_m &= \sqrt{1-v^2/c^2} \cdot q \cdot \frac{2\lambda vu}{2\pi\varepsilon_0 a c^2\sqrt{1-v^2/c^2}} \\
&= qv\frac{2\lambda u}{2\pi\varepsilon_0 c^2 a} \\
&= qv\frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2 a}
\end{aligned}$$

= *magnetisk kraft* fra strømførende leder på ladning q i avstand a og med hastighet v langs lederen.

Dvs: Som vårt eksperiment, med

$$k = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c^2}$$

Vi kan i neste omgang få den magnetiske kraften F_m på en "velkjent form", og dessuten oppnå en "feltbeskrivelse" av den nye effekten, ved å innføre *magnet-feltet* B i avstand a fra en lang, rett leder med strøm I:

$$B = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2 a}$$

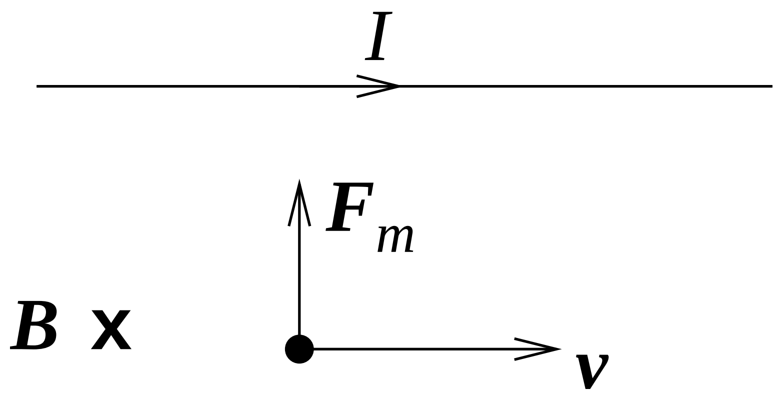
Dermed har vi:

$$F_m = qvB$$

På vektorform kan dette skrives

$$\boldsymbol{F}_m = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

dersom vi lar $\boldsymbol{B}$ peke inn i planet:



Dersom vi "omdøper" konstanten $1/\varepsilon_0 c^2$,

$$\mu_0 \equiv \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}},$$

(= *permeabiliteten* til vakuum), har vi $B = \mu_0 I/2\pi a$. Vi skal se at vi får nøyaktig samme resultat med utgangspunkt i Biot-Savarts lov, som gir oppskriften på beregning av $\boldsymbol{B}$ når vi kjenner fordelingen av elektrisk strøm I. Med andre ord, Biot-Savarts lov, som er empirisk bestemt (og som kom før relativitetsteorien), er konsistent med Coulombs lov og Einsteins (spesielle) relativitetsteori.

KONKLUSJON:
Mens $\boldsymbol{E}$ skapes av ladninger (i ro eller i bevegelse) og resulterer i elektrisk kraft på ladninger (i ro eller i bevegelse), skapes $\boldsymbol{B}$ av strøm (dvs ladninger i bevegelse) og resulterer i magnetisk kraft på ladninger i bevegelse.

Med både $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ til stede påvirkes ladning q med hastighet $\boldsymbol{v}$ av *Lorentzkraften*

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$