Institutt for fysikk, NTNU
TFY4150/FY1303/SIF4012/MNFFY103: Elektrisitet og magnetisme
Høst 2003

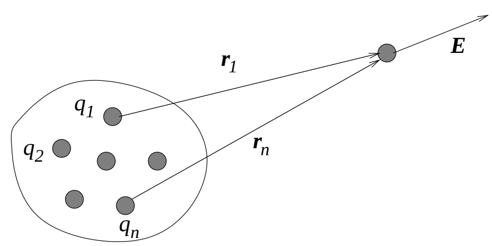
Sammendrag, uke 34 (21. og 22. august)

Elektrisk felt fra punktladning [AF 21.6; LHL 19.5; G 2.1.3]

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Superposisjonsprinsipp for elektrisk felt:

$$\boldsymbol{E} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{E}_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{r_j^2}\hat{r}_j$$



Kvantisering av ladning [AF 21.7; LHL 19.1; G s. xiv]

$$\begin{aligned} q &= ne \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ e &\simeq 1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} \end{aligned}$$

e = elementærladningen
Ladning til elektron: $-e$ proton: e nøytron: 0

Bevaringslov for elektrisk ladning [AF 21.8; LHL 19.1; G s. xiv]
Total ladning i et lukket system er alltid bevart

Kontinuerlige ladningsfordelinger [AF eks. 21.6; LHL 19.5; G 2.1.4]

På en lengdeskala som er stor i forhold til avstanden mellom enkeltladninger ser man en tilnærmet *kontinuerlig* ladningsfordeling. (På samme måte som at makroskopiske objekter har en tilnærmet kontinuerlig massefordeling, selv om de egentlig består av "enkeltmasser" (atomer).)

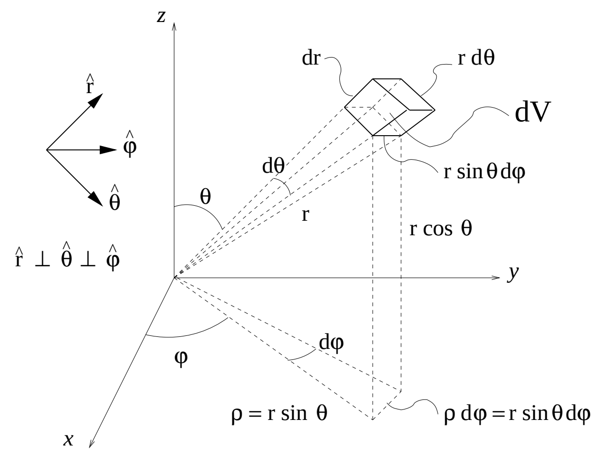
Sum over enkeltladninger erstattes da av *integral* over en ladningsfordeling:

$$\sum_i \Delta q_i \overset{\Delta q_i \to 0}{\to} \int dq$$

$3D$ (= 3 dimensjoner): romladning

$$
\begin{aligned}
dq &= \rho\, dV \\
\rho &= \rho(x,y,z) = \text{ ladning pr volumenhet } = \text{ romladningstetthet} \\
[\rho] &= [q/V] = \mathrm{C/m^3} \\
\text{Volumelement} : dV &= dx\; dy\; dz \;\; \text{(kartesiske koordinater)} \\
&= r^2 \sin\theta\; d\theta\; d\phi\; dr \;\; \text{(kulekoordinater)} \\
&= \rho\; d\rho\; d\phi\; dz \;\; \text{(sylinderkoordinater)}
\end{aligned}
$$

Volumelement dV i kulekoordinater:



dV = (dr) (r dθ) (r sin θ dφ)

$2D$: flateladning

$$
\begin{aligned}
dq &= \sigma\; dA \\
\sigma &= \sigma(x,y) = \text{ ladning pr flateenhet } = \text{ flateladningstetthet} \\
[\sigma] &= [q/A] = \mathrm{C/m^2} \\
\text{Flateelement} : dA &= dx\; dy \;\; \text{(kartesiske koordinater)} \\
&= r\; d\phi\; dr \;\; \text{(polarkoordinater)}
\end{aligned}
$$

$1D$: linjeladning

$$
\begin{aligned}
dq &= \lambda\; dl \\
\lambda &= \lambda(x) = \text{ ladning pr lengdeenhet } = \text{ linjeladningstetthet} \\
[\lambda] &= [q/L] = \mathrm{C/m} \\
\text{Linjeelement} : dl &= dx
\end{aligned}
$$

Elektrisk felt i avstand $\boldsymbol{r}$ fra infinitesimal ladning dq:

$$
d\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r}
$$

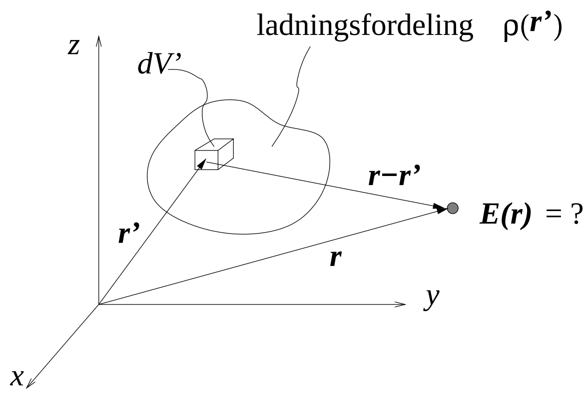
Elektrisk felt fra kontinuerlig ladningsfordeling:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\hat{r}\,dq}{r^2} \stackrel{3D}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\hat{r}\rho\,dV}{r^2}$$

Mer presist: Det elektriske feltet $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ i et punkt $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ på grunn av en fordeling av elektrisk ladning beskrevet ved ladningstettheten $\rho(\boldsymbol{r}') = \rho(x', y', z')$ er gitt ved

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\,dV'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

der $dV' = dx'\,dy'\,dz'$ (i kartesiske koordinater) er et volumelement i posisjon $\boldsymbol{r}'$.
Legg merke til at $\boldsymbol{r}$ ikke har samme betydning i de to siste ligningene. I den første angir $\boldsymbol{r}$ vektoren fra dq til punktet der $\boldsymbol{E}$ skal bestemmes. Dermed vil $\boldsymbol{r}$ være forskjellig for de ulike ladningselementene dq i systemet vi ser på. I den andre ligningen angir $\boldsymbol{r}$ posisjonen der $\boldsymbol{E}$ skal bestemmes, mens $\boldsymbol{r}'$ er posisjonsvariabelen til ladningstettheten ρ. Her hadde vi valget mellom å innføre en ny vektor $\boldsymbol{\mathcal{R}} \equiv \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ og skrive $\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}/\mathcal{R}^2$, eller (som vi valgte) å skrive om enhetsvektoren. På sin plass med en figur, kanskje:



Vi ser at den "aktuelle" enhetsvektoren skal peke fra volumelementet dV' i posisjon $\boldsymbol{r}'$ til posisjonen $\boldsymbol{r}$, og kan dermed skrives $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3$.

Elektriske feltlinjer [AF 21.6; LHL 19.6; G 2.2.1]

- gir en visuell framstilling av $\boldsymbol{E}$ i et område
- $\boldsymbol{E}$ ligger tangentielt til feltlinjene overalt
- styrken på $\boldsymbol{E}$ (dvs $|\boldsymbol{E}|$) er proporsjonal med tettheten av feltlinjer

Konsekvenser av dette er bl.a. at

- feltlinjene går radielt *ut fra* positive (punkt-)ladninger og radielt *inn mot* negative ladninger
- like mange feltlinjer går ut fra ladning $+Q$ som inn mot $-Q$