Institutt for fysikk, NTNU
TFY4150/FY1303/SIF4012/MNFFY103: Elektrisitet og magnetisme
Høst 2003

Sammendrag, uke 36 (4. og 5. september)

Ekvipotensialflater [AF 21.11; LHL 19.11; G 2.3.2]

Ekvipotensialflater er flater i rommet med konstant potensial.

$$\Delta V = -\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

for *vilkårlig* integrasjonsvei på en ekvipotensialflate.
Dermed:

$$\boldsymbol{E} \perp \quad \text{ekvipotensialflate}$$

Beregning av $\boldsymbol{E}$ fra V [AF 21.10; LHL 19.9; G 2.3.1, 1.2.2]

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$

Gradientoperatoren ∇:

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} \ \text{(kartesiske koordinater)} \\ &= \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi} \ \text{(kulekoordinater)} \end{aligned}$$

Vektoren ∇V peker i den retningen der V øker raskest, dvs i den retningen der den *retningsderiverte* til V er størst. Ettersom $\boldsymbol{E} = -\nabla V$, betyr det at det elektriske feltet peker i den retningen der V *avtar* raskest.

Eksempel, kulesymmetri:

$$\boldsymbol{E} = E(r)\hat{r} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r}$$

Energibevarelse for ladete partikler i elektrisk felt [AF 21.12; LHL 19.9]

Med *konservative* krefter er *total energi bevart*:

$$\begin{aligned} T + U &= \text{konstant} \\ T &= \frac{1}{2}mv^2 = \ \text{kinetisk energi} \\ U &= qV = \ \text{potensiell energi} \end{aligned}$$

Bevegelsen til en partikkel med masse m og ladning q i et elektrisk felt er bestemt av Newtons 2. lov (= *bevegelsesligningen*):

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q\boldsymbol{E} = -q\nabla V = -\nabla U$$

Vi har sett at for et konservativt kraftfelt $\boldsymbol{F}$ er arbeidet $\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}$ uavhengig av integrasjonsveien fra A til B. Det fulgte da at

$$\oint \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} = 0 \;\;,\;\; \nabla\times\boldsymbol{F} = 0$$

Ettersom $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}/q$, følger det at også det elektrostatiske feltet $\boldsymbol{E}$ er et konservativt vektorfelt. Da må $\boldsymbol{E}$ oppfylle tilsvarende ligninger:

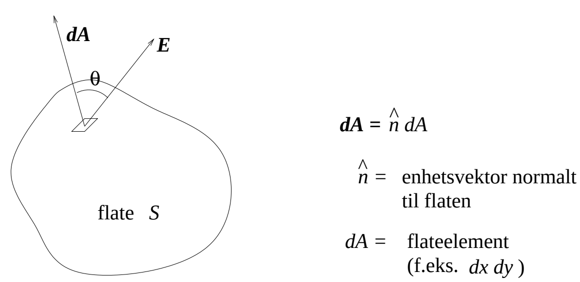
$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = 0 \;\;,\;\; \nabla\times\boldsymbol{E} = 0$$

Dette er en av *Maxwells ligninger* (for statiske, dvs ikke tidsavhengige felt). Den første er på såkalt *integralform*, og uttrykker at veiintegralet av $\boldsymbol{E}$ rundt en vilkårlig lukket kurve er lik null. Alternativt er innholdet i denne ligningen at det elektriske potensialet V overalt er entydig: Potensialforskjellen mellom startpunkt og sluttpunkt må forsvinne dersom start- og sluttpunkt er de samme.
Den andre ligningen er på såkalt *differensialform*, og uttrykker at det elektrostatiske feltet overalt er "rotasjonsfritt".

Elektrisk fluks [AF 25.3; LHL 19.7; G 2.2.1]

$$\phi = \int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{A}$$

Noen ganger skriver vi ϕ_E for å presisere at det er snakk om *elektrisk* fluks. Vi har tidligere definert elektriske feltlinjer slik at den elektriske feltstyrken $E = |\boldsymbol{E}|$ skulle være proporsjonal med tettheten av feltlinjer, eller antall feltlinjer pr flateenhet. Av ovenstående definisjon av elektrisk fluks ϕ kan vi da slutte at ϕ representerer antall feltlinjer som krysser flaten S.
Følgende figur illustrerer hva dette går ut på:



Flaten S er en vilkårlig "tenkt" eller "valgt" flate i rommet. Det elektriske feltet "eksisterer" i området der flaten S er "plassert". ($\boldsymbol{E}$ kan være null eller forskjellig fra null.) Flaten S tenkes så delt inn i små flateelementer $d\boldsymbol{A} = \hat{n}dA$, med areal dA og orientering i rommet spesifisert ved *flatenormalen* $\hat{n}$. Fluksen $d\phi$ gjennom flaten dA er da lik $\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{A}$. Den totale fluksen gjennom hele flaten S får vi ved å integrere opp bidragene $d\phi$, altså ligningen over.

Merk at fluksen er en *skalar* størrelse. Den kan imidlertid være positiv eller negativ, avhengig av om vinkelen mellom vektorene $\boldsymbol{E}$ og $d\boldsymbol{A}$ er mindre eller større enn 90 grader.

En *lukket flate* S er en flate som omslutter et veldefinert volum V, f.eks. et kuleskall, et peanøttskall e.l. Den elektriske fluksen gjennom en lukket flate skriver vi slik (jfr. notasjonen for veiintegral rundt lukket kurve):

$$\phi_c = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

Indeksen c står for "closed". Den er forsåvidt unødvendig sålenge vi skriver ned integralet. Ringen på integrasjonssymbolet er tilstrekkelig for å understreke at det er snakk om en lukket flate.
Med en lukket flate kan vi gjøre unna "fortegnsproblemet" en gang for alle: Vi velger *positiv* retning på $d\boldsymbol{A}$ *ut av* flaten.
Dermed kan vi konkludere med at

$$\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{fluks ut gjennom flaten}$$
$$\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{fluks inn gjennom flaten}$$

Dessuten:

$$\phi_c > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{netto fluks ut gjennom flaten}$$
$$\phi_c < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{netto fluks inn gjennom flaten}$$

For en *ikke lukket* flate S har vi ingen tilsvarende mulighet for å velge positiv retning på $d\boldsymbol{A}$. Flaten har to sider, og ingen av disse kan sies å være mer "inne" eller "ute" i forhold til den andre. I enkelte tilfeller, f.eks. i forbindelse med Stokes' teorem, har vi imidlertid valgt en positiv retning på (den lukkede!) kurven (linjen) som går rundt kanten av S. Da definerer vi positiv retning på $d\boldsymbol{A}$ ved hjelp av *høyrehåndsregelen*: La høyrehåndas fire øvrige fingre peke i positiv retning for flatens omsluttende kurve. Da peker tommelen i positiv retning for $d\boldsymbol{A}$.