Institutt for fysikk, NTNU
TFY4150/FY1303/SIF4012/MNFFY103: Elektrisitet og magnetisme
Høst 2003

Sammendrag, uke 37 (11. og 12. september)

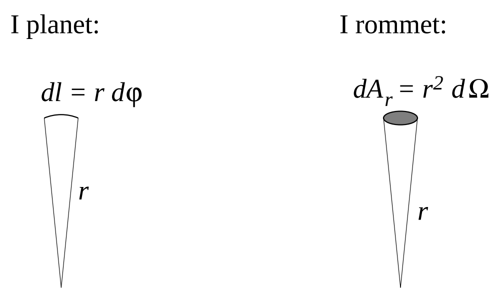
Gauss' lov [AF 25.4; LHL 19.7; G 2.2.1]

Gauss' lov på integralform:

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = \frac{q_{\text{in}}}{\varepsilon_0}$$

Her er integralet på venstre side av ligningen et *flateintegral* over en *lukket* flate S, mens q_{in} er total (netto) ladning innenfor den lukkede flaten ("gaussflaten").
Gauss' lov er en av *Maxwells ligninger*.
Innholdet i ligningen kan formuleres slik: Netto antall feltlinjer ut av et volum, dvs ut gjennom den lukkede flaten som avgrenser dette volumet, er bestemt av, og direkte proporsjonal med netto ladning inne i volumet, dvs innenfor den lukkede flaten.
Gauss' lov følger direkte av Coulombs lov, og representerer således ingen ny fysikk.

I forbindelse med beviset for Gauss' lov fikk vi bruk for det vi kalte en *romvinkel* Ω. På samme måte som en liten sektor i et plan utspenner en *vinkel* $d\phi$ vil en liten kjegle i rommet utspenne en *romvinkel* $d\Omega$. Videre: På samme måte som at buelengden dl i avstand r fra "sentrum" da blir $dl = r\ d\phi$ blir arealet dA_r av flaten som står normalt på $\boldsymbol{r}$ og som avgrenses av den lille kjeglen da lik $dA_r = r^2\ d\Omega$.



Lar vi sektoren i planet utspenne en hel omdreining, tilsvarer det en vinkel

$$\oint d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

Tilsvarende: Lar vi kjeglen i rommet utspenne en hel kuleflate, tilsvarer det en romvinkel

$$\oint d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\ d\theta = 4\pi$$

(Her har vi brukt kulekoordinater, der $dA_r = r^2 \sin\theta\ d\theta\ d\phi$ (se Øving 4!), slik at $d\Omega = \sin\theta\ d\theta\ d\phi$.)

Gauss' lov på differensialform [LHL 19.7; G 2.2.1]

Fra Matematikk 2 henter vi *divergensteoremet*:

$$\oint_S \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{A} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{G} \, dV$$

Her er S en lukket flate som omslutter volumet V, mens $\boldsymbol{G}$ representerer et vilkårlig vektorfelt. Divergens til en vektor $\boldsymbol{G}$:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{G} &= \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (G_x\hat{x} + G_y\hat{y} + G_z\hat{z}) \\ &= \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} \end{aligned}$$

i kartesiske koordinater. I kule- eller sylinderkoordinater ser divergensoperatoren litt mer "komplisert" ut. I dette kurset vil den bestandig bli oppgitt dersom det blir bruk for den!
Merk: Divergensen til en vektor er en *skalar*, i motsetning til *gradienten* til en skalar, som er en *vektor*.

Anvender vi divergensteoremet på Gauss' lov, kan vi skrive:

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E} \, dV$$

Netto ladning q_{in} i volumet V kan uttrykkes ved (rom-)ladningstettheten ρ:

$$q_{\text{in}} = \int_V \rho \, dV$$

Dermed må vi, ifølge Gauss' lov, kunne skrive

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E} \, dV = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} \, dV$$

Ettersom dette skal være riktig for vilkårlige lukkede flater S (med tilhørende volum V), må ikke bare disse *integralene* være like store – *integrandene* må også *overalt* være like store:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Dette er Gauss' lov for det elektrostatiske feltet på differensialform.

Tidligere har vi sett at det elektrostatiske feltet er "rotasjonsfritt", $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$. Men det er altså ikke "divergensfritt".

Når kan vi bruke Gauss' lov?

- Gauss' lov på integralform kan brukes til å bestemme det elektriske feltet fra en ladningsfordeling der vi har en eller annen form for *symmetri*. Eksempler: Kulesymmetri, plansymmetri, sylindersymmetri.

- Gauss' lov på differensialform innbyr til å bestemme ladningsfordelingen, beskrevet ved ladningstettheten ρ, dersom det elektriske feltet er kjent.

Elektriske ledere (intro) [AF 25.5; LHL 19.2, 19.8; G 2.5]

Hovedinndeling av materialer med hensyn på deres elektriske egenskaper:

Ledere: Metaller. Atomenes ytterste elektron(er) er *fri* til å bevege seg gjennom lederen.

Isolatorer: Alle elektroner er *bundet* til atomene. Eksempler: glass, plast etc.

Halvledere: Er isolator ved $T = 0$ (dvs null temperatur), men enkelte elektroner frigjøres ved $T > 0$. Viktige materialer i elektroniske komponenter (f.eks. dioder, transistorer). Eksempler: Si, Ge, GaAs.

Videre: Superledere, Plasma, Elektrolytter etc.

I dette kurset (i hvert fall fram til jul!) skal vi kun diskutere *ledere* og *isolatorer*. En isolator kalles også for et *dielektrikum*. Mer om det i neste uke.