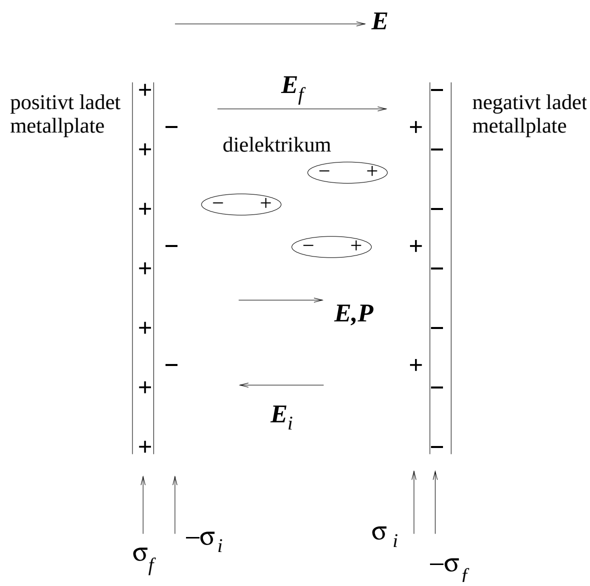
Institutt for fysikk, NTNU
TFY4150/FY1303/SIF4012/MNFFY103: Elektrisitet og magnetisme
Høst 2003

Sammendrag, uke 39 (25. og 26. september)

Elektrisk forskyvning. [AF 25.8; LHL 20.5; G 4.3]

Bruker idealisert system som vi har sett på før:
Motsatt ladete metallplater (uendelig store), nå med dielektrikum i mellom:



Fri ladning pr flateenhet på metallplatene: σ_f
... som genererer elektrisk felt mellom platene: $E_f = \sigma_f/\varepsilon_0$ (null felt utenfor platene, se forelesn. 12.09.)
Indusert ladning pr flateenhet på overflaten av dielektrikum: σ_i
... som genererer elektrisk felt mellom platene: $E_i = \sigma_i/\varepsilon_0$
Totalt felt mellom platene: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_f + \boldsymbol{E}_i \quad \Rightarrow \quad E = |\boldsymbol{E}| = E_f - E_i = (\sigma_f - \sigma_i)/\varepsilon_0$
Netto ladning på overflatene: $\pm\sigma = \pm(\sigma_f - \sigma_i)$
... som genererer totalt felt mellom platene: $E = \sigma/\varepsilon_0 = (\sigma_f - \sigma_i)/\varepsilon_0$, OK!

Vi har: $\sigma_i = P$ = polariseringen i dielektrikumet (= dipolmoment pr volumenhet)

Dermed:

$$\sigma_f = \sigma + \sigma_i = \varepsilon_0 E + P$$

Vi ser altså at tettheten av *fri* ladning σ_f er bestemt av kombinasjonen $\varepsilon_0 E + P$. I endel tilfeller, f.eks. i endel eksperimenter, er det nettopp den frie ladningen vi har kontroll over. Med dielektrikum til stede er det derfor ofte *hensiktsmessig* å "referere til" vektorfeltet

$$\boldsymbol{D} \equiv \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$

$\boldsymbol{D}$ kalles *elektrisk forskyvning.*

Her:

$$D = |\boldsymbol{D}| = \sigma_f$$

Generelt (som vi også fant for $\boldsymbol{P}$):

$$\sigma_f = \boldsymbol{D} \cdot \hat{n} = D_\perp$$

der $D_\perp$ er normalkomponenten av den elektriske forskyvningen.

Gauss' lov for $\boldsymbol{D}$:

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} = Q_f$$

der Q_f er netto *fri* ladning innenfor den lukkede flaten S. (Netto total ladning innenfor S er $Q = Q_f + Q_p$, med Q_p = netto *bundet* ladning, knyttet til polariseringen $\boldsymbol{P}$, innenfor S.)

Gauss' lov for $\boldsymbol{D}$ på differensialform:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f$$

der ρ_f er fri ladning pr volumenhet. Differensialformen følger av integralformen ovenfor ved å anvende divergensteoremet samt at $Q_f = \int_V \rho_f \, dV$, med V = volumet innenfor den lukkede flaten S.

Da følger også:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{P} = -\rho_p$$

der $Q_p = \int_V \rho_p \, dV$.

Elektrisk susceptibilitet og permittivitet. [AF 25.9; LHL 20.5; G 4.4]

Lineær respons: $\boldsymbol{P}$ proporsjonal med $\boldsymbol{E}$, dvs vi kan skrive

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

der vi har innført χ_e = elektrisk susceptibilitet.
NB: En slik lineær sammenheng mellom $\boldsymbol{P}$ og $\boldsymbol{E}$ gjelder *ikke alltid*, men i dette kurset skal vi hele tiden anta at det gjelder.

Dermed:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \\ &= (1 + \chi_e)\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \\ &= \varepsilon_r \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \\ &= \varepsilon \boldsymbol{E} \end{aligned}$$

Her har vi innført størrelsene
$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ = relativ permittivitet ("dielektrisitetskonstanten")

$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ = mediets permittivitet

Enheter:
$[\chi_e] = [\varepsilon_r] = 1$ (dimensjonsløs)
$[\varepsilon] = [\varepsilon_0] = \mathrm{C}^2/\mathrm{Nm}^2$

Punktladning q i dielektrikum med permittivitet ε:

Elektrisk felt: $\boldsymbol{E}(r) = (q/4\pi\varepsilon r^2)\hat{r}$
Elektrisk potensial: $V(r) = q/4\pi\varepsilon r$
Dvs: Som for punktladning i vakuum, men med $\varepsilon_0 \to \varepsilon > \varepsilon_0$; mediet polariseres og *skjermer* punktladningen slik at E og V reduseres med en faktor $1/\varepsilon_r$.

Kapasitans. [AF 25.10; LHL 20.1; G 2.5.4]

Kondensator = to adskilte elektriske ledere med ladning $\pm Q$

Coulombs lov $\Rightarrow$ elektrisk felt i området omkring lederne er proporsjonalt med Q

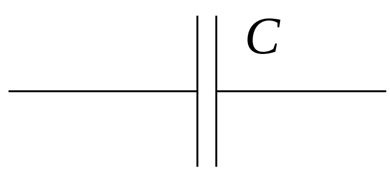
Dermed følger også at *potensialforskjellen* ΔV mellom de to lederne er proporsjonal med Q:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

C = kondensatorens *kapasitans*

Enhet for kapasitans: $[C] = [Q/\Delta V] = \mathrm{C/V} \equiv \mathrm{F}$ (farad)

Symbol i elektriske kretser:



C er en *geometrisk faktor*, avhengig av ledernes utforming og innbyrdes avstand, og dessuten det mellomliggende mediet.
Kapasitans er, pr definisjon, en *positiv* størrelse.
Utregning av C for et gitt system vil gå ut på å bestemme potensialforskjellen mellom de to lederne, $\Delta V = V_+ - V_-$, for en gitt ladning $\pm Q$.

Parallellplatekondensator, luftfylt (vakuum), med plateareal A, plateavstand d:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

Parallellplatekondensator, fylt med dielektrikum med relativ permittivitet ε_r, plateareal A, plateavstand d:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$$

Energien til det elektriske feltet:

Potensiell energitetthet, dvs potensiell energi pr volumenhet, er med elektrisk felt lik

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Vi hadde også at potensiell energi kunne "assosieres" med den elektriske ladningen: Dersom et "system" har elektrisk potensial (f.eks. relativt til potensialet uendelig langt borte, som vi som regel kan sette lik null) $v(q)$ når det har ladning q, må vi utføre et arbeid $dW = v(q)\, dq$ for å øke ladningen fra q til $q + dq$. Følgelig blir totalt arbeid, og dermed også total "lagret" potensiell energi i systemet, lik

$$W = U = \int_0^Q v(q)\, dq$$

for å lade opp systemet fra null ladning til endelig ladning Q.

Alternativt kan vi altså regne ut lagret potensiell energi ved å integrere opp energitettheten u over hele volumet V:

$$U = \int_V u\, dV = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2\, dV$$

(Merk at her står V for *volum* og ikke potensial.)