Institutt for fysikk, NTNU
TFY4150/FY1303/SIF4012/MNFFY103: Elektrisitet og magnetisme
Høst 2003

Sammendrag, uke 47 (20. og 21. november)

Elektromagnetisk induksjon [AF 27.1 - 27.3; LHL 24.1; G 7.2]

En elektromotorisk spenning (ems) $\mathcal{E}$ induseres i ei ledersløyfe dersom den magnetiske fluksen ϕ_m som omsluttes av ledersløyfa varierer med tiden:

$$\mathcal{E} = -\frac{\phi_m}{dt}$$

Omsluttet magnetisk fluks er gitt ved flateintegralet av det magnetiske feltet $\boldsymbol{B}$, der integralet tas over flaten S som omsluttes av ledersløyfa:

$$\phi_m = \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

Dermed ser vi at ϕ_m kan variere med tiden på ulike måter, f.eks. med

- tidsavhengig omsluttet areal S
- tidsavhengig orientering av ledersløyfa (bestemt ved retningen på $d\boldsymbol{A}$)
- tidsavhengig magnetfelt $\boldsymbol{B}$ (retning og/eller absoluttverdi)

I alle tilfelle får vi en indusert ems i ledersløyfa.

Retningen på $\mathcal{E}$ bestemmes med *Lenz' lov*: En eventuell generert strøm I, drevet av $\mathcal{E}$, skaper et magnetfelt $\boldsymbol{B}_I$ og dermed en magnetisk fluks $\phi_I = \int_S \boldsymbol{B}_I \cdot d\boldsymbol{A}$ som er *motsatt rettet fluksendringen* $d\phi_m$ som i utgangspunktet forårsaket $\mathcal{E}$.

En indusert ems $\mathcal{E}$ i ei lukket ledersløyfe impliserer et *indusert elektrisk felt* $\boldsymbol{E}$:

$$\mathcal{E} = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

Faradays lov uttrykker dermed en sammenheng mellom *feltene* $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$:

$$\oint_c \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

der c er en lukket kurve som omslutter en flate S.

Ovenstående *integralform* av Faradays lov kan omformes til en ligning på *differensialform* ved hjelp av Stokes' teorem,

$$\oint_c \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot d\boldsymbol{A}$$

Det gir:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

Legg merke til at det vi tidligere har kommet fram til for *elektrostatisk felt*,

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

er et spesialtilfelle av Faradays lov, for med *statiske* felt er den tidsderiverte av $\boldsymbol{B}$ selvsagt lik null.
Ettersom integralet av et slik "Faraday-indusert" elektrisk felt rundt en lukket kurve *ikke* er lik null, er det (pr definisjon) heller *ikke* et konservativt felt.

Gjensidig induktans [AF 27.12; LHL 25.4; G 7.2.3]

En strøm I_1 i ei strømsløyfe (1) resulterer i et magnetfelt $\boldsymbol{B}_1$ i området omkring. Dette feltet kan vi, i hvert fall i prinsipp, regne ut ved hjelp av Biot-Savarts lov:

$$\boldsymbol{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{(1)} \frac{d\boldsymbol{l}_1 \times \hat{r}}{r^2}$$

(se f.eks. uke44.pdf). Dersom ei *anna* strømsløyfe (2) er plassert i dette området, vil magnetfeltet fra sløyfe (1) resultere i en magnetisk fluks gjennom sløyfe (2):

$$\phi_2 = \int_{S_2} \boldsymbol{B}_1 \cdot d\boldsymbol{A}_2 = \int_{S_2} \left\{ \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{(1)} \frac{d\boldsymbol{l}_1 \times \hat{r}}{r^2} \right\} \cdot d\boldsymbol{A}_2$$

Uansett hva dette gufne integralet måtte være, kan vi uttrykke det på formen

$$\phi_2 = M_{21} I_1$$

forutsatt at I_1 er konstant i sløyfe (1), dvs den samme alle steder i sløyfa. (Og det må den jo være hvis det ikke skal hope seg opp med ladning noe sted...!)
Faktoren M_{21} er den *gjensidige induktansen* mellom de to sløyfene (1) og (2) og uttrykker hvor mye magnetisk fluks vi får "gjennom" (dvs omsluttet av) sløyfe (2) når det går en strøm i sløyfe (1):

$$M_{21} = \frac{\phi_2}{I_1}$$

Omvendt må vi også få en magnetisk fluks gjennom sløyfe (1) hvis det går en strøm i sløyfe (2):

$$\phi_1 = \int_{S_1} \boldsymbol{B}_2 \cdot d\boldsymbol{A}_1 = \int_{S_1} \left\{ \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{(2)} \frac{d\boldsymbol{l}_2 \times \hat{r}}{r^2} \right\} \cdot d\boldsymbol{A}_1$$

dvs: Strømmen I_2 i sløyfe (2) skaper magnetfeltet $\boldsymbol{B}_2$, og dermed fluksen ϕ_1 gjennom sløyfe (1).

Og uansett hva *dette* integralet måtte bli, kan vi alltids skrive

$$\phi_1 = M_{12} I_2$$

der faktoren M_{12} uttrykker hvor mye magnetisk fluks vi får "gjennom" (dvs omsluttet av) sløyfe (1) når det går en strøm i sløyfe (2):

$$M_{12} = \frac{\phi_1}{I_2}$$

Både M_{21} og M_{12} er rett og slett geometriske faktorer som avhenger av form, størrelse og relativ plassering til de to strømsløyfene.
En kan vise at

$$M_{21} = M_{12}$$

alltid gjelder. En kan dermed *velge* mellom to alternative framgangsmåter for å bestemme gjensidig induktans mellom to strømsløyfer: Enten beregne magnetisk fluks gjennom (1) pga strøm i (2), eller omvendt. Noen ganger er det ene mye enklere enn det andre!

Enhet for induktans: $[M] = [\phi_m/I] = [B \cdot A/I] = \mathrm{T{\cdot}m^2/A} \equiv \mathrm{H}$ (henry)

Gjensidig induksjon:
Tidsavhengig strøm $I_1(t)$ i sløyfe (1) gir tidsavhengig fluks $\phi_2(t)$ gjennom sløyfe (2), og dermed indusert ems i sløyfe (2):

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt}$$

Tidsavhengig strøm $I_2(t)$ i sløyfe (2) gir tidsavhengig fluks $\phi_1(t)$ gjennom sløyfe (1), og dermed indusert ems i sløyfe (1):

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -M_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

Tema på siste forelesning, torsdag 27.11. kl 10.15 - 12.00:

- Selvinduktans: Strøm I i ledersløyfe skaper magnetfelt $\boldsymbol{B}$ i området omkring, og dermed magnetisk fluks $\phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$ gjennom ledersløyfa selv. Selvinduksjon: Tidsavhengig I gir tidsavhengig fluks gjennom sløyfa, og dermed indusert ems i sløyfa.

- RL-krets: Skal se på tilkobling og frakobling av batteri i enkel krets med seriekobling av motstand R og spole med (selv-)induktans L. Se gjerne på tilsvarende "eksperiment" med RC-krets på forhånd.

- Energi i magnetfelt: Skal beregne energien som skal til for å øke strømmen gjennom en spole med induktans L fra 0 til en verdi I. Resultatet skal vi skrive om og finne at denne energien kan "assosieres med" magnetfeltet i spolen. Se gjerne på tilsvarende utledning av "Energi i elektrisk felt", der vi ladet opp en kondensator med kapasitans C fra 0 til en verdi Q for ladningen på platene.

For fullstendighetens skyld burde vi helt til slutt hatt tid til å snakke litt om *forskyvningsstrøm*, som egentlig ikke er noen strøm, men som uttrykker at et tidsavhengig elektrisk felt genererer et magnetfelt. Dette kommer til uttrykk i et tilleggsledd i Amperes lov:

$$\oint_c \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I_{\text{in}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

På differensialform:

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

Dette kalles da ikke lenger Amperes lov (som er forbeholdt statiske felt), men Ampere–Maxwells lov, fordi det var Maxwell som fant ut at Amperes lov ikke lenger var riktig når en hadde tidsavhengige felt, og videre hvordan Amperes lov skulle "fikses på".

Som sagt, dette *burde* vi hatt tid til, men det har vi ikke. Den "interesserte leser" henvises til et eget notat om dette, som kommer på plass under hjemmesida ganske snart. Men: Forskyvningsstrøm og Ampere–Maxwells lov er altså *ikke* pensum.