**Institutt for fysikk, NTNU**
**TFY4150/FY1303/SIF4012/MNFFY103: Elektrisitet og magnetisme**
**Høst 2003**

# Sammendrag, uke 48 (27. november)

**Selvinduktans** [AF 27.8; LHL 25.4; G 7.2.3]

En strøm $I$ i ei strømsløyfe resulterer i et magnetfelt $\boldsymbol{B}$ i området omkring. Dette feltet kan vi, i hvert fall i prinsipp, regne ut ved hjelp av Biot-Savarts lov:

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_c \frac{d\boldsymbol{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

(se f.eks. uke44.pdf). Dette magnetfeltet vil resultere i en magnetisk fluks gjennom sløyfa:

$$\phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = \int_S \left\{ \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_c \frac{d\boldsymbol{l} \times \hat{r}}{r^2} \right\} \cdot d\boldsymbol{A}$$

Uansett hva dette integralet måtte være, kan vi uttrykke det på formen

$$\phi = LI$$

forutsatt at $I$ er konstant, dvs den samme alle steder i sløyfa. (Og det må den jo være hvis det ikke skal hope seg opp med ladning noe sted...!)
Faktoren $L$ er *selvinduktansen* til sløyfa og uttrykker hvor mye magnetisk fluks vi får "gjennom" sløyfa når det går en strøm der:

$$L = \frac{\phi}{I}$$

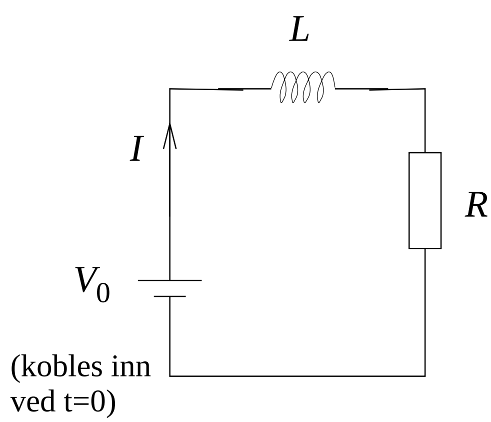
Enhet for selvinduktans: $[L] = [\phi_m/I] = [B \cdot A/I] = \mathrm{T{\cdot}m^2/A} \equiv \mathrm{H}$ (henry)

Selvinduksjon:
Tidsavhengig strøm $I(t)$ i sløyfa gir tidsavhengig fluks $\phi(t)$ gjennom sløyfa, og dermed indusert ems:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

***RL*-krets** [AF Ex 27.5; LHL 25.2; G Ex 7.12]

Ser på seriekobling av *induktans* $L$ (f.eks. en spole) og *resistans* $R$. Et batteri med likespenning $V_0$ kobles til kretsen ved tidspunktet $t = 0$.




Total ems i kretsen er da

$$V_0 - L\frac{dI}{dt}$$

der det siste leddet er indusert "motspenning" over induktansen når vi prøver å *endre* strømstyrken gjennom den.
Ifølge Kirchhoffs spenningsregel (evt "sløyferegel") må denne totale emsen i sløyfa tilsvare spenningsfallet over motstanden $R$, med andre ord

$$V_0 - L\frac{dI}{dt} = RI$$

eller

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V_0$$

Dette er nøyaktig samme type 1. ordens differensialligning for strømmen $I$ som det vi hadde for kondensatorladningen $Q$ da vi studerte opplading av kondensator i en $RC$-krets (se uke43.pdf, side 4). Løsningen blir

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

der vi har brukt initialbetingelsen $I(0) = 0$. (Før innkobling av batteriet er åpenbart $I = 0$. I tidspunktet $t = 0$ kan *ikke* strømmen i kretsen "hoppe" opp til en endelig verdi forskjellig fra null. Det måtte i såfall innebære at $dI/dt \to \infty$ i $t = 0$, hvilket igjen ville innebære en uendelig stor motspenning over induktansen. Det er rett og slett ikke fysisk mulig! Altså må $I$ være kontinuerlig i $t = 0$, og vi kan sette $I(0) = 0$.)

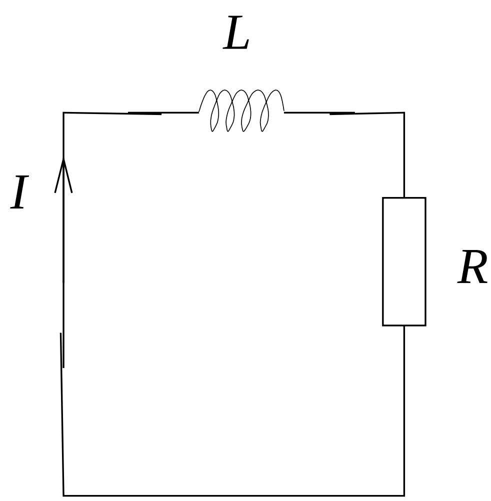
*Tidskonstant* for endring av strømmen:

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Verdien av $\tau$ gir en *størrelsesorden* for hvor lang tid det tar å øke strømmen i en slik $RL$-krets fra 0 til maksimal verdi $V_0/R$:

$$I(t \to \infty) = \frac{V_0}{R}$$

Frakobling av batteriet etter at strømmen har nådd sin maksimale verdi:




Med andre ord: Vet et “nytt” starttidspunkt $t = 0$ er strømmen i kretsen $I(0) = V_0/R$.
Kirchhoffs spenningsregel gir nå

$$-L\frac{dI}{dt} = RI$$

dvs total ems i kretsen, $-LdI/dt$, må være lik spenningsfallet over motstanden, $RI$. Løsningen av denne ligningen er

$$I(t) = \frac{V_0}{R}e^{-Rt/L}$$

Uten induktansen $L$ ville strømmen i kretsen umiddelbart falle til null når vi kobler ut batteriet, for da er det ingen ems i kretsen. Induktansen prøver å motvirke at $I$ blir mindre ved at det induseres en spenning $-LdI/dt$ over induktansen. Dermed faller ikke strømmen umiddelbart til null, men derimot eksponentielt som funksjon av tiden, med den samme tidskonstanten $\tau = L/R$ som vi hadde for “oppbygging” av strømmen.

**Energi i magnetfelt** [AF 26.8, 27.11; LHL 25.3; G 7.2.4]

La oss regne ut hvor mye energi som må tilføres en spole med induktans $L$ når vi øker strømmen gjennom spoletråden fra $i = 0$ til en “sluttverdi” $i = I$.
Tilført energi ved å øke strømmen fra $i$ til $i + di$:

$$dU_B = P\ dt = iv\ dt = iL\frac{di}{dt}dt = Li\ di$$

Her er $P = iv$ tilført effekt, og $v = Ldi/dt$ spenningen over spolen idet vi endrer strømmen fra $i$ til $i + di$.
Dermed blir total energi tilført for å øke strømmen fra 0 til $I$ lik

$$U_B = \int dU_B = L\int_0^I i\ di = \frac{1}{2}LI^2$$

Denne energien kan vi nå assosiere med magnetfeltet $B$ inne i spolen. Anta at spolen er tilnærmet uendelig lang, med $N$ viklinger på hele lengden $l$. Tverrsnittet av spolen har areal

$A$. Da er magnetfeltet inne i spolen

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

(På utsiden av spolen er magnetfeltet null.) Total magnetisk fluks gjennom de $N$ viklingene på spolen blir

$$\phi_m = NAB = NA\mu_0 \frac{N}{l} I$$

som også kan skrives på formen

$$\phi_m = LI$$

der $L$ er spolens (selv-)induktans. Med dette kan vi omforme uttrykket for energien $U_B$:

$$U_B = \frac{1}{2}\frac{NAB}{I} I^2 = \frac{1}{2} NAB \cdot \frac{Bl}{\mu_0 N} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \cdot Al$$

Her er $Al$ lik volumet inne i spolen, så vi ser at vi har en *energitetthet* (dvs energi pr volumenhet) assosiert med magnetfeltet $B$:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Fra før har vi funnet at vi har en energitetthet $u_E$ assosiert med et elektrisk felt $E$:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Dermed blir *total energitetthet i et elektromagnetisk felt*:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Kommentar: Dette uttrykket er "alltid riktig", i den forstand at $u$ representerer energien "lagret" i feltene $E$ og $B$. I litteraturen "risikerer" du å støte på formelen

$$u = \frac{1}{2}\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2$$

for total energitetthet dersom vi har polariserbare og/eller magnetiserbare medier tilstede. (I den siste overgangen her brukte vi at $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$, med $\varepsilon =$ mediets permittivitet og $\mu =$ mediets permeabilitet.)

Disse to uttrykkene for $u$ er ikke identiske, og kan derfor ikke representere den samme energitettheten. Det siste uttrykket for $u$ inkluderer da også et bidrag som ikke er direkte "lagret" i feltene, nemlig den "elastiske" energien knyttet til polarisering og magnetisering, dvs innrettingen av elektriske og magnetiske dipoler.

I den grad noe av dette blir aktuelt til eksamen, skal vi kun bry oss om *feltenergien* gitt ved

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$