

Løsningsforslag til øving 10

Veiledning mandag 15. mars

Oppgave 1

a) Dette systemet kan oppfattes som en seriekobling av tre motstander: de to 30 cm lange Al-ledningene og motstanden $R = 10 \Omega$. Motstanden til Al-ledningene blir

$$R_A = \frac{l}{\sigma A} = \frac{0.60 \text{ m}}{3.54 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1} \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = 0.017 \Omega$$

Samme strømstyrke I går gjennom hele systemet. Den er

$$I = \frac{V}{R + R_A} = \frac{1.5 \text{ V}}{10.017 \Omega} = 0.1497 \text{ A} \simeq 0.15 \text{ A}$$

ifølge Ohms lov. Vi får dermed spenningsfallene

$$V_R = RI = 10 \Omega \cdot 0.1497 \text{ A} = 1.497 \text{ V}$$

over motstanden R og

$$V_A = R_A I = 0.017 \Omega \cdot 0.1497 \text{ A} = 0.025 \text{ V}$$

over de to Al-ledningene tilsammen.

b) Strømstyrken I beregnet vi under punkt a). Utviklet effekt i motstanden R blir

$$P = V_R I = 1.497 \text{ V} \cdot 0.1497 \text{ A} = 0.224 \text{ W}$$

($0.225 \simeq 0.23 \text{ W}$ dersom vi neglisjerer motstanden og spenningsfallet over Al-ledningene)

c) Her må vi bestemme tettheten av frie elektroner n . Deretter kan vi bruke $I = j \cdot A = nevA$ til å beregne midlere driftshastighet v .

I Al har vi 2700 kg pr m^3 . Dette tilsvarer $2700/0.02698 \text{ mol} = 100074 \text{ mol} = 100074 \cdot 6.02 \cdot 10^{23} \text{ atomer} = 6.02 \cdot 10^{28} \text{ atomer}$, og da like mange frie elektroner, med antagelsen ett fritt elektron pr atom Al. Midlere driftshastighet blir

$$v = \frac{I}{neA} = \frac{0.15}{6.02 \cdot 10^{28} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-6}} = 1.56 \cdot 10^{-5} \text{ m/s} = 15.6 \mu\text{m/s}$$

Midlere termiske hastighet for elektronene anslår vi ved å sette kinetisk energi lik termisk energi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{3}{2}k_B T \\ \Rightarrow v &= \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \simeq 10^5 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Her er $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K Boltzmanns konstant. Vi ser at midlere driftshastighet er ca 10 størrelsesordener mindre enn midlere termiske hastighet. Det tar altså flere timer for et gitt elektron å komme seg fra den ene til den andre siden av "systemet" vårt!

Oppgave 2

a) Dersom 700 W tilsvarer 90% av total effekt, blir total effekt $700/0.9$ W = 778 W. Denne effekten skal leveres i 0.005 s. Da må en energi $(700/0.9) \cdot 0.005$ J = 3.89 J lagres i kondensatoren.

b) Vi har utledet i forelesningene hvor stort arbeid som skal til for å lade opp en kondensator med kapasitans C . La oss kort rekapitulere: For å øke ladningen på kondensatoren fra q til $q + dq$ fordres arbeidet $dW = v(q) dq$, der $v(q)$ er spenningen over kondensatoren med ladning q . Pr definisjon er $C = q/v$ slik at $dW = C^{-1} q dq$ og totalt arbeid $W = Q^2/2C$ for å øke ladningen fra 0 til Q . Med $Q = VC$ kan dette også skrives $W = CV^2/2$. Det betyr at spenningen som skal til for å lagre energien 3.89 J i en kondensator med kapasitans 0.80 mF er

$$V = \sqrt{\frac{2W}{C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3.89}{0.80 \cdot 10^{-3}}} = 98.6 \text{ V}$$

Oppgave 3

Hele lederen kan deles opp i "sylinderrør" med indre radius r , ytre radius $r + dr$, og dermed tverrsnitt med areal

$$dA = 2\pi r dr$$

Strømmen i et slik rør er

$$dI = j \cdot dA = j_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot 2\pi r dr$$

Total strøm I finner vi ved å integrere dI over lederens tverrsnitt, dvs ved å la r variere fra 0 til R :

$$\begin{aligned} I &= \int dI \\ &= \int_0^R j_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot 2\pi r dr \\ &= 2\pi j_0 \Big|_0^R \left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{r^4}{4R^2}\right) \\ &= 2\pi j_0 \left(\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{4}R^2\right) \\ &= \frac{1}{2}j_0\pi R^2 \end{aligned}$$

Oppgave 4

1. Hele området mellom $r = a$ og $r = b$ kan oppfattes som en seriekobling av motstander dR , der hver motstand er et tynt kuleskall med radius r og tykkelse dr :

$$dR = \frac{\rho \, dr}{4\pi r^2}$$

Hele motstanden finner vi ved å legge sammen enkeltmotstandene, dvs ved å integrere fra $r = a$ til $r = b$:

$$\begin{aligned} R &= \int dR \\ &= \int_a^b \frac{\rho \, dr}{4\pi r^2} \\ &= \frac{\rho}{4\pi} \Big|_a^b \left(-\frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \end{aligned}$$

2. Det oppgitte uttrykket for strømstyrken I viser at vi her kan bruke Gauss' lov for det elektriske feltet til å bestemme I :

$$I = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Vi må her forutsette at ladningen som kommer inn på den innerste lederen umiddelbart fordeler seg jevnt over kuleflaten ved $r = a$ før den starter sin vandring gjennom materialet mellom $r = a$ og $r = b$.

Potensialforskjellen mellom indre og ytre lederskall bestemmes enkelt ettersom vi kjenner feltet **E** :

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_a - V_b \\ &= - \int_b^a E(r) \, dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \Big|_b^a \frac{1}{r} \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \end{aligned}$$

Av disse uttrykkene følger det at motstanden er

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$