Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1303 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2004

Løsningsforslag til øving 12

Veiledning mandag 29. mars

Oppgave 1

I det første eksperimentet er $B = 0$. Da er Newtons 2. lov

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= m\boldsymbol{a} = q\boldsymbol{E} \\ \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= \frac{q}{m}\boldsymbol{E} \\ \Rightarrow \boldsymbol{v}(t) &= \boldsymbol{v}(0) + \frac{q}{m}\boldsymbol{E}t = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(0) + \boldsymbol{v}(0)t + \frac{q}{2m}\boldsymbol{E}t^2$$

Her er det naturlig å velge $t = 0$ idet partikkelen entrer området med $E \neq 0$, og dessuten velge origo i denne posisjonen:

$$\boldsymbol{r}(0) = (x_0, y_0) = (0, 0)$$

Her er hastigheten

$$\boldsymbol{v}(0) = v\,\hat{x}$$

når vi legger x-aksen mot høyre. y-aksen legger vi oppover, slik at

$$\boldsymbol{E} = -E\,\hat{y}$$

(dvs med $E > 0$) Partikkelbanen inne i feltet blir altså en parabel, akkurat som når vi kaster en masse i tyngdefeltet. Hastigheten i x-retning påvirkes ikke slik at

$$x(t) = vt$$

mens partikkelen får en konstant akselerasjon i y-retning, dvs forflytningen i y-retning som funksjon av t må være bestemt ved

$$y(t) = -\frac{q}{2m}Et^2$$

Partikkelen vil forlate området der $E \neq 0$ ved tidspunktet

$$t_L = \frac{x(t_L)}{v} = \frac{L}{v}$$

Vertikalposisjonen er da

$$y(t_L) = -\frac{q}{2m}E\frac{L^2}{v^2}$$

Allerede nå kan vi konkludere med at $q < 0$ dersom $y(t_L) > 0$.

Distansen fra $x = L$ til $x = L + D$ tilbakelegges deretter uten påvirkning av noen krefter, med retning i forhold til x-aksen gitt ved vinkelen α, der

$$\tan\alpha = \frac{v_y(t_L)}{v_x(t_L)} = \frac{-(q/m)E(L/v)}{v} = -\frac{qEL}{mv^2}$$

Vi må dessuten ha

$$\tan\alpha = \frac{y - y(t_L)}{D}$$

der y er treffpunktet på detektoren, ved $x = L + D$.

Eksperimentet gjentas nå med samme E-felt, men vi skrur nå på et magnetfelt B med retning inn i planet inntil partiklene ikke avbøyes av feltene. Det må bety at den elektriske krafta (oppover) akkurat balanseres av en magnetisk kraft (nedover). Altså:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = 0 \\ \Rightarrow E &= vB \\ \Rightarrow \frac{1}{v} &= \frac{B}{E} \end{aligned}$$

Dermed:

$$\begin{aligned} \frac{y - y(t_L)}{D} &= -\frac{qEL}{mv^2} = -\frac{qEL}{m} \cdot \frac{B^2}{E^2} \\ \Rightarrow y + \frac{q}{2m}EL^2\frac{B^2}{E^2} &= -\frac{qEL}{m} \cdot \frac{B^2}{E^2}D \\ \Rightarrow yE = -\frac{q}{m} \cdot B^2\left(DL + \frac{1}{2}L^2\right) \\ \Rightarrow \frac{q}{m} &= -\frac{yE}{B^2\left(DL + \frac{1}{2}L^2\right)} \end{aligned}$$

som skulle vises.

Vi har allerede konkludert med at $q < 0$ for disse partiklene, ettersom de avbøyes oppover av et elektrisk felt rettet nedover.

Oppgave 2

a) Ionenes hastighet når de kommer inn i magnetfeltet er gitt ved at endringen i potensiell energi gjennom spenningsfallet V tilsvarer endringen i ionenes kinetiske energi:

$$eV = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

Sentripetalakselerasjonen inne i magnetfeltet er

$$a = \frac{v^2}{r}$$

slik at Newtons 2. lov gir

$$F = m\frac{v^2}{r} = evB \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mv}{eB}$$

Baneradius for en partikkel med masse m blir

$$r = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Vm}{e}}$$

altså proporsjonal med $\sqrt{m}$. Baneradier og masser for de ulike isotopene må altså forholde seg til hverandre på følgende vis:

$$\frac{r_i}{r_j} = \sqrt{\frac{m_i}{m_j}}$$

der $i, j = 12$ eller 13.
Dersom ionenes treffpunkt på den fotografiske platen skal være adskilt med en avstand $a = 3.0$ cm, må forskjellen i banenes *diameter* være 3.0 cm. Vi får:

$$a = 3.0 \text{ cm } = 2(r_{13} - r_{12}) = 2r_{12}\left(\sqrt{\frac{m_{13}}{m_{12}}} - 1\right)$$

Det gir

$$r_{12} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{m_{13}}{m_{12}}} - 1\right)^{-1} = 1.5 \text{ cm } \cdot \left(\sqrt{\frac{13}{12}} - 1\right)^{-1} \simeq 36.7 \text{ cm}$$

og

$$r_{13} = r_{12} + \frac{a}{2} \simeq 38.2 \text{ cm}$$

Vi kan nå bestemme hvor sterkt magnetfelt som kan brukes for å få disse baneradiene:

$$B = \frac{1}{r_{13}}\sqrt{\frac{2Vm_{13}}{e}} = \frac{1}{0.382} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1000 \cdot 13 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}}{1.6 \cdot 10^{-19}}} = 0.043 \text{ T}$$

Dette representerer øvre grense for B: Et sterkere magnetfelt vil redusere både r_{12} og r_{13}, men r_{13} mest, slik at treffpunktene kommer nærmere hverandre. Samtidig skal ikke $d_{13} = 2r_{13}$ overstige instrumentets fysiske begrensning gitt ved $L = 90$ cm. Det tilsvarer en minsteverdi på magnetfeltstyrken:

$$B_{\text{min}} = \frac{1}{L/2}\sqrt{\frac{2Vm_{13}}{e}} = \frac{1}{0.45} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1000 \cdot 13 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}}{1.6 \cdot 10^{-19}}} = 0.037 \text{ T}$$

Vi kan med andre ord benytte et magnetfelt i området 37 til 43 mT.

Oppgave 3

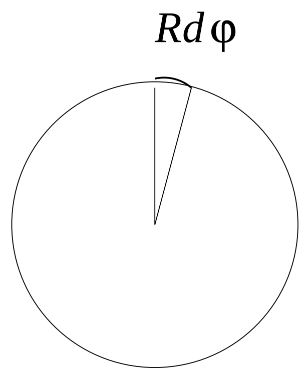
a) Argumentasjonen her tilsvarer den vi brukte da vi skulle beregne det elektriske feltet på symmetriaksen til en jevnt ladet ring. Da så vi på bidragene til feltet fra diametralt motsatte ladningselementer dq og overbeviste oss om at det totale elektriske feltet måtte peke langs symmetriaksen.
Her kan vi f.eks. se på de to lederelementene som ligger akkurat på positiv og negativ y-akse og bestemme retningen på bidraget til magnetfeltet på z-aksen fra disse. Vi tar for oss positive z først. (Se figuren på neste side. Her angir index + avstand fra og feltbidrag fra strømelementet som krysser positiv z-akse, mens index - angir tilsvarende fra strømelementet som krysser negativ z-akse.) "Strømelementet" $I\ d\boldsymbol{l}$ som krysser positiv y-akse har retning langs negativ x-akse. Kryssproduktet av denne vektoren med $\boldsymbol{r}_+$ fra strømelementet til den aktuelle posisjonen på positiv z-akse blir en vektor som ligger i yz-planet, med positiv y- og z-komponent. Det diametralt motsatte strømelementet som krysser den negative y-aksen har retning langs positiv x-akse. Kryssproduktet av denne vektoren med $\boldsymbol{r}_-$ fra strømelementet til den aktuelle posisjonen på positiv z-akse blir en vektor som også ligger i yz-planet, men denne vil ha *negativ* y-komponent og positiv z-komponent. Av symmetrigrunner må disse bidragene til $\boldsymbol{B}$ være like store i absoluttverdi, ha like store z-komponenter med samme fortegn, og ha like store y-komponenter med *motsatt* fortegn. Summen av de to bidragene peker med andre ord langs (positiv) z-akse.
Tilsvarende argumentasjon kan vi benytte for par av diametralt motsatte strømelementer rundt hele den strømførende ringen. De vil alle ha like stor z-komponent med samme fortegn og like store x- og y-komponenter med motsatt fortegn.
Konklusjon: $\boldsymbol{B}$ på positiv z-akse har retning langs z-aksen.

b) I forrige punkt overbeviste vi oss om at $\boldsymbol{B}(z)$ har retning langs positiv z-akse når $z > 0$. Hva hvis $z < 0$?
En figurbetraktning tilsvarende den vi gjorde under punkt a) viser at strømelementet som krysser den positive y-aksen gir et bidrag til $\boldsymbol{B}(z)$ på negativ z-akse som ligger i yz-planet med positiv z-komponent og negativ y-komponent. For strømelementet som krysser den negative y-aksen finner vi et bidrag med positiv z-komponent og positiv y-komponent. Alt i alt et magnetfelt med retning langs positiv z-akse.
Konklusjon: Magnetfeltet peker langs positiv z-akse på hele z-aksen.

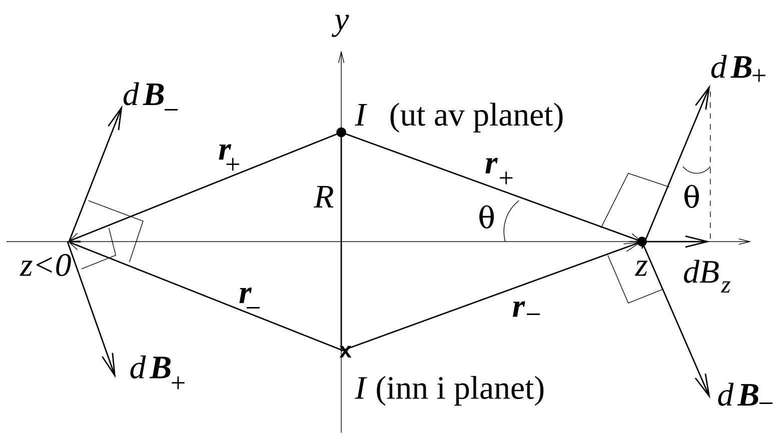
c) Vektorene $I\ d\boldsymbol{l}$ og $\hat{r}$ står vinkelrett på hverandre. Dermed er

$$|I\ d\boldsymbol{l} \times \hat{r}| = IR\ d\phi \cdot 1$$

ettersom et kurveelement dl langs en sirkel er lik radien R multiplisert med vinkelelementet $d\phi$:



Retningen på $d\boldsymbol{B}$ må bli som vist i figuren:



Fra figuren ser vi at

$$\frac{dB_z}{dB} = \sin\theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

og det er jo nettopp z-komponenten av magnetfeltet vi her er ute etter. Absoluttverdien til $d\boldsymbol{B}$ blir

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{IR\,d\phi}{z^2 + R^2}$$

slik at

$$dB_z = dB\sin\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{IR\,d\phi}{z^2 + R^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{\mu_0 I R^2\,d\phi}{4\pi\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

Den totale z-komponenten, og dermed det totale magnetfeltet, får vi deretter ved å integrere opp bidragene fra alle strømelementene i hele ringen, dvs ved å integrere dette uttrykket over vinkelen ϕ fra 0 til 2π:

$$B(z) = \int dB_z = \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

som skulle vises.

d) I stor avstand fra strømsløyfa kan vi sette

$$z^2 + R^2 \simeq z^2$$

Dermed blir magnetfeltet tilnærmet lik

$$B(z) \simeq \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3}$$

Strømsløyfas magnetiske dipolmoment er

$$m = IA = I \cdot \pi R^2$$

så vi kan skrive dette magnetfeltet på formen

$$B(z) = \frac{\mu_0 m}{2\pi z^3}$$

Det er vel verdt å sammenligne dette resultatet med det elektriske feltet på aksen til en elektrisk dipol, i stor avstand z fra dipolen. Dette gjorde vi i øving 4, hvor vi fant

$$E(z) = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 z^3}$$

der p er dipolens elektriske dipolmoment. Altså nøyaktig samme resultat, med m istedetfor p og μ_0 istedetfor $1/\varepsilon_0$.
Vi skal finne flere analogier mellom elektrostatikken og magnetostatikken etterhvert!