

Løsningsforslag til øving 1

Veiledning mandag 12. januar

Aller først et par kommentarer angående notasjon: Mens vektorer på tavla blir angitt med en pil over symbolet, brukes typisk **fete** symboler i trykte notater, som her. Det betyr at **$\mathbf{F}$** angir vektoren (f.eks. en kraft), og da både dens størrelse F og retning. Enhetsvektorer, dvs (dimensjonsløse) vektorer med lengde 1, angis med en $\hat{}$ over symbolet. Da har vi f.eks. sammenhengene **$\mathbf{F} = |\mathbf{F}|\hat{\mathbf{F}} = F\hat{\mathbf{F}}$** . Videre vil vi skrive de ulike *komponentene* av en vektor med en senket indeks, f.eks. F_x for x -komponenten av **$\mathbf{F}$** . Vi skal altså ikke bruke notasjonen $F_x = dF/dx$, slik dere muligens kommer til å gjøre i Matematikk 2.

Oppgave 1

Massen til et oksygenatom er $m_O = (16 \text{ g/mol}) / (6.02 \cdot 10^{23} \text{ atomer/mol}) = 2.66 \cdot 10^{-23} \text{ g/atom} = 2.66 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$. Gravitasjonskraften mellom de to oksygenatomene blir da

$$F_g = G \frac{m_O^2}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{(2.66 \cdot 10^{-26})^2 \text{ kg}^2}{(100 \cdot 10^{-10})^2 \text{ m}^2} = 6.67 \cdot 2.66^2 \cdot 10^{-11-52+16} \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = 4.71 \cdot 10^{-46} \text{ N}$$

Gravitasjonskrefter er alltid *tiltrekkende*.

Med ett ekstra elektron har hvert oksygenion ladning $-e$. Den elektriske kraften F_e mellom de to ionene blir

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1.6 \cdot 10^{-19})^2}{(100 \cdot 10^{-10})^2} = 2.30 \cdot 10^{-12} \text{ N}$$

Med ladningene i enheten C og avstanden i enheten m, samt SI-verdien $9 \cdot 10^9$ for faktoren $1/4\pi\epsilon_0$ er vi sikret at kraften kommer ut i enheten N.

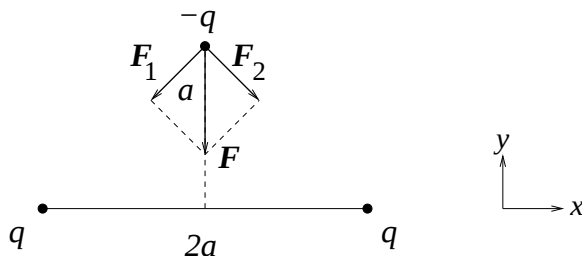
Den elektriske kraften mellom to ladninger med *samme fortegn* er *frastøtende*.

Forholdet mellom de to kreftene er

$$F_e/F_g = \frac{2.30 \cdot 10^{-12}}{4.71 \cdot 10^{-46}} = 5 \cdot 10^{33}$$

Det betyr f.eks. at gravitasjonskraften mellom ladete partikler (og “ikke altfor store” legemer) kan neglisjeres i forhold til den elektriske kraften.

Oppgave 2



Dersom den tredje ladningen skal ligge like langt fra de to andre, må den ligge på linjen som halverer og står vinkelrett på forbindelseslinjen mellom disse. Pytagoras gir da en avstand $\sqrt{(\sqrt{2}a)^2 - a^2} = a$ fra nevnte forbindelseslinje til den tredje ladningen.

Kraften mellom $-q$ og q er tiltrekkende, ettersom de har motsatt fortegn. I absoluttverdi må de to kreftene F_1 og F_2 være like store:

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(\sqrt{2}a)^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a^2}$$

Av figuren ser vi at $\mathbf{F}_1$ og $\mathbf{F}_2$ har like store y -komponenter (slik jeg har valgt koordinatsystem), men motsatt rettede x -komponenter. Dermed blir den resulterende kraften

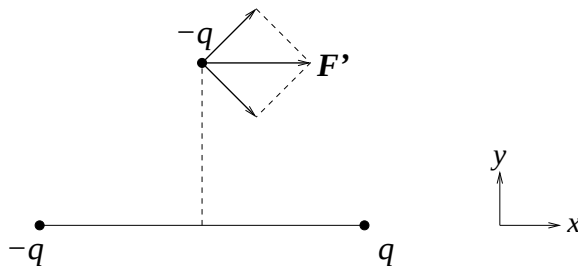
$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (F_{1y} + F_{2y})\hat{y} \\ &= 2F_{1y}\hat{y} \\ &= -2F_1 \cos \frac{\pi}{4} \hat{y} \\ &= -\frac{q^2}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2} \hat{y} \end{aligned}$$

Her angir $\hat{y}$ enhetsvektor i y -retning.

Med $q = 2 \cdot 10^{-6}$ C og $a = 5 \cdot 10^{-2}$ m får vi

$$F = \frac{(2 \cdot 10^{-6})^2 \text{C}^2}{4\sqrt{2}\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \text{C}^2/\text{Nm}^2 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2 \text{m}^2} \simeq 10.2 \text{ N}$$

Dersom den ene q erstattes av $-q$, f.eks. den lengst til venstre, virker det en tiltrekkende og en frastøtende kraft på den tredje ladningen:



Vi ser av figuren at totalkraften $\mathbf{F}'$ har retning langs x -aksen, og ettersom delkreftene her har like store x - og y -komponenter (i absoluttverdi), må absoluttverdien av totalkraften være den samme som før. Altså:

$$\mathbf{F}' = F'\hat{x} = F\hat{x} = \frac{q^2}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2} \hat{x}$$

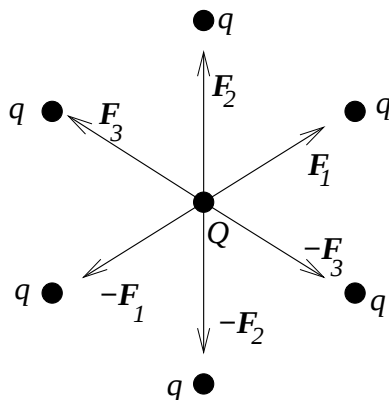
Kommentar: Denne oppgaven var vel ikke altfor vanskelig? Ikke desto mindre illustrerer den de grunnleggende elementer i elektrostatikken:

- Elektriske ladninger påvirker hverandre (“vekselvirker”) med krefter ifølge Coulombs lov.

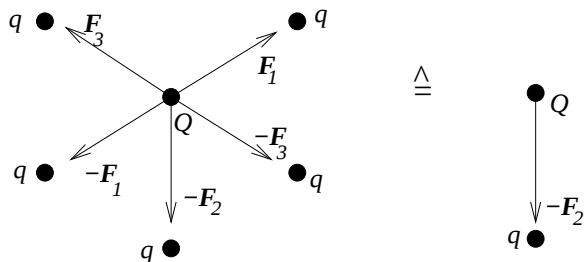
- Krefter, enten de er elektriske eller av andre slag, er *vektorer*.
- For elektriske krefter (og andre krefter, for den saks skyld) gjelder *superposisjonsprinsippet*: Nettokraften på en ladning finner vi ved å summere opp enkeltkreftene som virker på den. For all del, ikke glem at det da er snakk om en sum av vektorer!

Oppgave 3

a) På grunn av symmetrien i problemet er det vel innlysende at testladningen Q blir utsatt for null nettokraft, idet kreftene fra to og to ladninger kansellerer hverandre:



b) Vi fjerner en av ladningene, f.eks. den “øverste”:



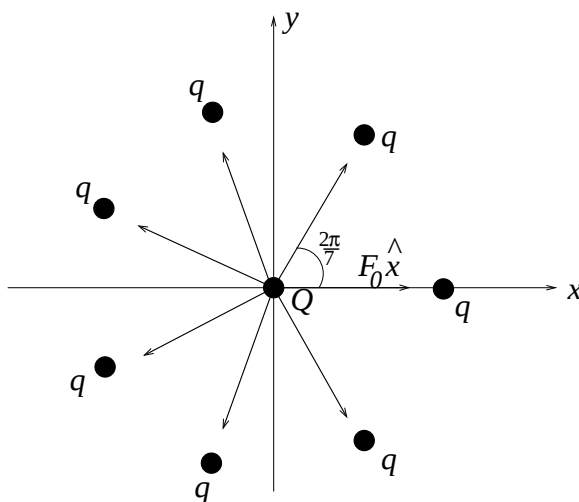
Det er da umiddelbart klart at nettokraften på Q blir lik kraften fra den ladningen vi fjernet, med motsatt fortegn, altså $-\mathbf{F}_2$.

Vi har her brukt *superposisjonsprinsippet*. Matematisk kunne vi f.eks. formulere løsningen slik: La $\sum_{(6)} \mathbf{F}_i$ angi nettokraften med alle 6 ladningene til stede og $\sum_{(5)} \mathbf{F}_i$ nettokraften etter vi har fjernet ladningen som påvirket Q med kraften $\mathbf{F}_2$. Da er

$$\sum_{(5)} \mathbf{F}_i = \sum_{(6)} \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_2 = 0 - \mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_2$$

c) Også med et odde antall q -ladninger, f.eks. 7, må nettokraften på testladningen Q i sentrum bli lik null. Anta at nettokraften *ikke* var null. En dreining av systemet på $360/7^\circ$ i papirplanet ville da medføre at nettokraften endret retning. Men systemet er uendret som følge av en slik dreining, så kraften på Q kan heller ikke ha endret seg og må følgelig være null.

Hvis noen mot formodning ikke er overbevist, er det jo bare å regne ut nettokraften. Legg Q i origo og (f.eks.) den ene q på x -aksen:



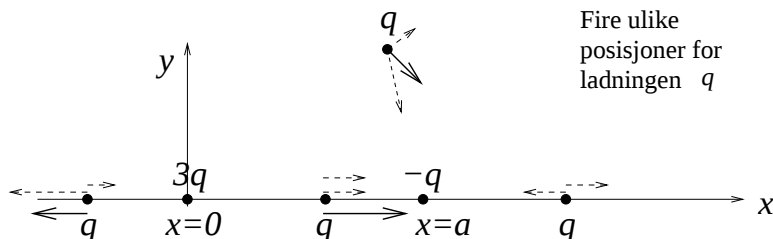
Nettokraften på Q blir da:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= F_x \hat{x} + F_y \hat{y} \\
 &= F_0 (1 + 2 \cos 2\pi/7 + 2 \cos 4\pi/7 + 2 \cos 6\pi/7) \hat{x} + \\
 &\quad F_0 (0 + \sin 2\pi/7 + \sin(-2\pi/7) + \sin 4\pi/7 + \sin(-4\pi/7) + \sin 6\pi/7 + \sin(-6\pi/7)) \hat{y} \\
 &= F_0 (1 + 1.247 - 0.445 - 1.802) \hat{x} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Her har vi satt absoluttverdien av kraften mellom q og Q lik F_0 og benyttet at $\cos(-x) = \cos x$ og $\sin(-x) = -\sin x$.

Resultatet av å fjerne en av q -ladningene blir selvsagt det samme som i punkt b.

Oppgave 4



Fire ulike
posisjoner for
ladningen q

a) Punktladningen q er i likevekt dersom kraften på den er lik null. Her virker det to krefter, en frastøtende fra $3q$ og en tiltrekkende fra $-q$, og disse to kan bare kansellere hverandre dersom de har eksakt motsatt retning. Det er ikke mulig dersom q er plassert utenfor x -aksen, f.eks. som i figuren over. (Her er de to enkeltkomponentene av kraften angitt med stippled piler og totalkraften med heltrukken pil.) Derfor må eventuelle likevektsposisjoner være på x -aksen.

b) Vi har fått oppgitt at det er en likevektsposisjon x_0 for q på x -aksen. Vi kan ikke ha x_0

mellom 0 og a , for på dette intervallet peker de to kraftkomponentene i samme retning. Vi kan heller ikke ha x_0 til venstre for $x = 0$, for da er avstanden mellom q og $3q$ alltid mindre enn avstanden mellom q og $-q$, og følgelig den frastøtende kraften $3q^2/4\pi\epsilon_0 x_0^2$ alltid større enn den tiltrekkende kraften $q^2/4\pi\epsilon_0(a - x_0)^2$. Altså må $x_0 > a$. Vi bestemmer x_0 ved å sette total kraft lik null:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 x_0^2} \hat{x} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (x_0 - a)^2} \hat{x} \\ \Rightarrow \frac{3}{x_0^2} &= \frac{1}{(x_0 - a)^2} \\ \Rightarrow 3x_0^2 - 6ax_0 + 3a^2 &= x_0^2 \\ \Rightarrow 2x_0^2 - 6ax_0 + 3a^2 &= 0 \\ \Rightarrow x_0 &= \frac{6a}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{36a^2 - 24a^2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}a \simeq 2.37a \end{aligned}$$

Da forutsetningen var $x_0 > a$, er løsningen med negativt fortegn foran kvadratroten ikke en aktuell løsning. (Den tilsvarer $x \simeq 0.63a$, hvor begge kraftkomponenter er like store og har *samme* retning.)

Stabiliteten av likevektsposisjonen x_0 bestemmes kanskje enklest ved å se på nettokraften når $x \gg x_0$. Da “ser” punktladningen q tilnærmet en punktladning $3q - q = 2q$ og må følgelig erfare en netto frastøtende kraft. Vi vet at kraften er null bare i $x = x_0$. Da må kraften peke mot høyre for alle $x > x_0$, også for en liten forflytning til høyre for x_0 , mens den må peke mot venstre for en liten forflytning til venstre for x_0 . Dermed er likevekten ustabil mhp en forflytning langs x -aksen.

Alternativt, med litt regning: La oss først forenkle notasjonen ved å innføre funksjonen $f(x)$:

$$\mathbf{F}(x) = F(x)\hat{x} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(x - a)^2} \right) \hat{x} \equiv \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} f(x)\hat{x}$$

Deretter bestemmer vi df/dx i $x = x_0$:

$$\left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0} = -\frac{6}{x_0^3} + \frac{2}{(x_0 - a)^3} \simeq -\frac{6}{(2.37a)^3} + \frac{2}{(1.37a)^3} \simeq \frac{0.33}{a^3} > 0$$

Da $f(x_0) = 0$ og $f'(x_0) > 0$, er likevekten ustabil.

Oppgave 5

a) Riktig svar er C:

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{5.5^2 + 5.3^2} = 7.6$$

b) Riktig svar er D:

Vektoren $\mathbf{A}$ har positiv x -komponent og negativ y -komponent, hvilket betyr at den ligger i 4. kvadrant. La oss først bestemme vinkelen θ mellom x -aksen og $\mathbf{A}$ (dvs den minste, og i tallverdi). Vi har da

$$\tan \theta = \frac{|A_y|}{|A_x|} = \frac{4.6}{7.4}$$

som gir $\theta = 32$ grader. Den søkte vinkelen, når vi går mot klokka fra x -akse til $\mathbf{A}$ må bli lik $360 - \theta = 328$ grader.

c) Riktig svar er C:

La oss sette $\mathbf{C} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$. Da er

$$C_x = B_x - A_x = -8.7$$

$$C_y = B_y - A_y = 3.9$$

slik at absoluttverdien til $\mathbf{C}$ blir

$$C = |\mathbf{C}| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{8.7^2 + 3.9^2} = 9.5$$

d) Riktig svar er A:

Vektorene $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ ligger i henholdsvis 3. og 2. kvadrant. Vinkelen mellom negativ x -akse og $\mathbf{A}$ er (i absoluttverdi)

$$\theta_A = \arctan \frac{|A_y|}{|A_x|} = \arctan \frac{5.8}{6.1} = 43.6$$

Vinkelen mellom negativ x -akse og $\mathbf{B}$ er (i absoluttverdi)

$$\theta_B = \arctan \frac{|B_y|}{|B_x|} = \arctan \frac{4.6}{9.8} = 25.1$$

Vinkelen mellom $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ er dermed lik $43.6 + 25.1 \simeq 69$ grader.

