Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1303 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2004

Løsningsforslag til øving 13

Veiledning mandag 19. april

Oppgave 1

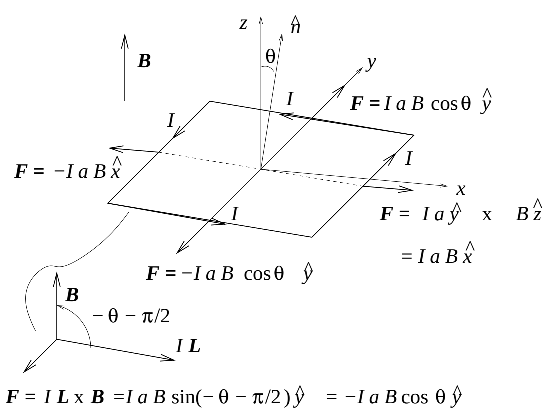
a) Sløyfas magnetiske dipolmoment:

$$\boldsymbol{m} = IA\,\hat{n} = Ia^2\,\hat{n}$$

Sløyfa består av 4 rette ledere med lengde a, der to og to har strømmen gående i motsatt retning. Dermed blir den magnetiske kraften

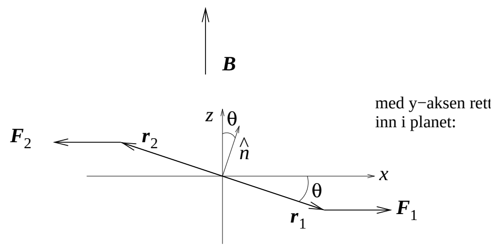
$$\boldsymbol{F} = I\int d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B} = I\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B}$$

motsatt rettet, men like stor i absoluttverdi, for slike par av rette lederbiter. Den totale kraften på sløyfa blir dermed null. Noen detaljer er inkludert i figuren:



Vi ser av figuren at kreftene fra magnetfeltet ville ha deformert strømsløyfa dersom det hadde vært en mulighet. For ei makroskopisk strømsløyfe er dette som regel en neglisjerbar effekt, men dersom strømsløyfa er en klassisk modell av et elektron i bane rundt en atomkjerne, aner vi at *i tillegg* til en innretting av strømsløyfa (som vi skal se på i resten av denne oppgaven), vil magnetfeltet påvirke selve banebevegelsen til elektronet rundt kjernen. Med andre ord: Atomets magnetiske moment endres både i *retning* og i *absoluttverdi*. Førstnevnte effekt er *paramagnetisme*, sistnevnte effekt er *diamagnetisme*. En klassisk modell av diamagnetisme ser vi nærmere på i oppgave 3, her konsentrerer vi oss om orienteringen av $\boldsymbol{m}$.

b) Av figuren over ser vi at de to strømmene som går parallelt med xz-planet påvirkes av krefter i hhv positiv og negativ y-retning. Disse kreftene vil da ikke bidra til dreiemomentet omkring y-aksen.
Kreftene som virker på strømmene som går parallelt med y-aksen gir tilsammen et dreiemoment (se figuren nedenfor og ovenfor)



$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= \sum \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \\
&= -r_1 F_1 \sin\theta\ \hat{y} - r_2 F_2 \sin\theta\ \hat{y} \\
&= -2 \cdot \frac{a}{2} \cdot IaB \sin\theta\ \hat{y} \\
&= -Ia^2 \cdot B \sin\theta\ \hat{y} \\
&= -m \cdot B \sin\theta\ \hat{y} \\
&= \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}
\end{aligned}
$$

Skiftet av fortegn i siste linje skyldes av vi hadde valgt positiv vinkel θ mellom z-aksen og $\hat{n}$, altså mellom $\boldsymbol{B}$ og $\boldsymbol{m}$. Kryssproduktet $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$ er, pr definisjon, m ganger B ganger sinus til vinkelen mellom $\boldsymbol{m}$ og $\boldsymbol{B}$, dvs $mB\sin(-\theta) = -mB\sin\theta$.

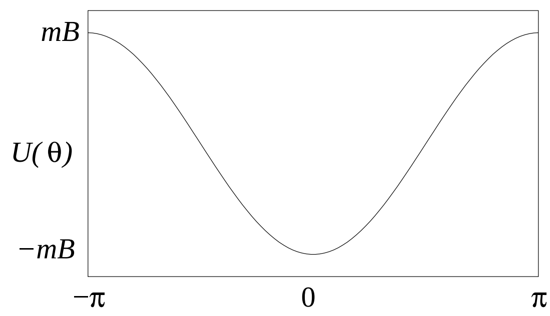
c) I oppgave 3c i øving 6 utledet vi en *generell* sammenheng mellom dreiemoment τ og tilhørende potensiell energi U, nemlig at en rotasjon gjennom en vinkel $d\alpha$ under påvirkning av et dreiemoment τ resulterer i en endring dU i potensiell energi gitt ved

$$dU = -\tau\ d\alpha$$

Utledningen av denne sammenhengen var ikke avhengig av hvilken *type* krefter og dreiemoment det handler om, og må derfor gjelde like bra for vår magnetiske dipol i et magnetfelt som for den elektriske dipolen i et elektrisk felt i øving 6. Følgelig:

$$
\begin{aligned}
U(\theta) &= \int_{\theta_0}^{\theta} dU \\
&= -\int_{\theta_0}^{\theta} \tau(\alpha)\ d\alpha \\
&= mB \int_{\theta_0}^{\theta} \sin\alpha\ d\alpha \\
&= mB\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right) \\
&= -mB\cos\theta \\
&= -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}
\end{aligned}
$$

Her valgte jeg å sette $U(0) = -mB$, dvs $\theta_0 = \pi/2$.
Skisse:



Vi har minimal U, og følgelig stabil likevekt for $\theta = 0$, dvs for dipolen orientert slik at $\boldsymbol{m}$ er parallell med $\boldsymbol{B}$. Vi har maksimal U, og følgelig ustabil likevekt for $\theta = \pm\pi$, dvs for dipolen orientert slik at $\boldsymbol{m}$ er parallell med $-\boldsymbol{B}$.
Dette er magnetismens analogi til polarisering av dielektriske medier i et ytre elektrisk felt: Magnetiske dipoler retter seg inn langs det påtrykte magnetfeltet. Som nevnt lenger opp, dette er hva vi kaller *paramagnetisme*. Vi har snakket om ulike typer magnetisme i forelesningene – la dette være en liten oppsummering av det:
Medier som består av atomer som har et atomært magnetisk dipolmoment som *ikke* er lik null, og der dipolmomentene på atomer i nærheten av hverandre *ikke* vekselvirker med hverandre, er *paramagneter*. *Uten* et ytre magnetfelt vil de atomære magnetiske dipolmomentene peke i tilfeldige retninger, slik at den midlere *magnetiseringen*, dvs midlere magnetiske dipolmoment pr volumenhet (se punkt *d*)), blir lik null overalt i mediet. Slik var det også med midlere polarisering i et dielektrikum når vi ikke hadde noe ytre elektrisk felt. *Med* et ytre magnetfelt får vi en tendens til innretting av magnetiske dipolmoment langs det ytre feltet, og dermed en midlere magnetisering forskjellig fra null. Eksempler på paramagnetiske materialer er aluminium (Al) og magnesium (Mg).
Medier som består av atomer med atomært magnetisk dipolmoment *lik null* har ingenting å rette inn i et påtrykt magnetfelt. Men, og som nevnt lenger opp, *banebevegelsen* til elektronene rundt atomkjernen vil påvirkes av et ytre magnetfelt, slik at vi får *indusert* et atomært magnetisk dipolmoment i hvert eneste atom. Slike medier er *diamagneter*. Vi skal se kvalitativt på denne effekten i oppgave 3 nedenfor og finne at det induserte magnetiske dipolmomentet vil bli *motsatt rettet det ytre feltet*. Diamagnetisme er en mye svakere effekt enn paramagnetisme. Også i paramagneter, der vi *har* permanente atomære magnetiske dipolmoment, får vi en slik diamagnetisk "respons" i et ytre magnetfelt. Den diamagnetiske responsen vil imidlertid være tilnærmet neglisjerbar i en paramagnet. For å kunne måle diamagnetisme, trenger vi derfor medier med null atomært magnetisk dipolmoment i utgangspunktet (dvs før vi skrur på det ytre magnetfeltet). Eksempler på diamagneter er gull (Au), sølv (Ag), kobber (Cu).
I enkelte medier har vi atomer med magnetiske dipolmoment som *vekselvirker* med dipolmomentene på naboatomene. F.eks. kan vekselvirkningen være slik at det er energetisk foretrukket at naboatomer har sine magnetiske dipolmoment i samme retning. Da har vi en *ferromagnet*, og eksempler på ferromagneter er jern (Fe), kobolt (Co) og nikkel (Ni).

d) Maksimal tetthet av magnetisk dipolmoment i jern blir lik antall jernatomer pr volumenhet ganget med magnetisk dipolmoment pr jernatom:

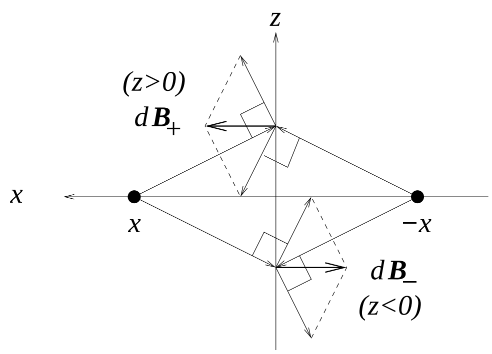
$$\frac{m}{V} = 2\mu_B \cdot \frac{7.9 \cdot 10^6}{55.9} \cdot 6.02 \cdot 10^{23} = 2 \cdot 9.27 \cdot 10^{-24} \cdot \frac{7.9 \cdot 10^6}{55.9} \cdot 6.02 \cdot 10^{23} = 1.6 \cdot 10^6$$

Enheten til m er Am^2, enheten til V er m^3. Følgelig blir enheten til magnetisk dipolmoment pr volumenhet, eller *magnetisering*, A/m.

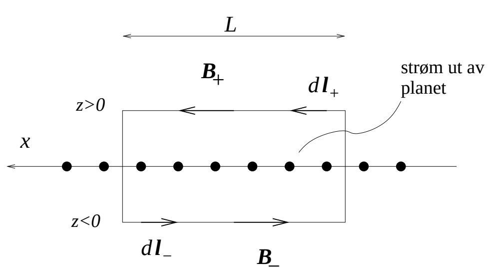
Oppgave 2

Retningen på $\boldsymbol{B}$:

- $B_y = 0$ fordi $d\boldsymbol{B} \sim \hat{y} \times \hat{r} \perp \hat{y}$ ifølge Biot-Savarts lov. (Alle strømbidrag går i y-retningen.)
- $B_z = 0$: Se på figuren nedenfor. Her er $d\boldsymbol{B}_+$ og $d\boldsymbol{B}_-$ bidrag til magnetfeltet henholdsvis over og under xy-planet fra "symmetrisk lokaliserte" uendelig lange, tynne strømførende ledere i posisjon $\pm x$. Biot-Savarts lov og figurbetraktning gir at $\boldsymbol{B}$ må være rettet i positiv x-retning for $z > 0$ og i negativ x-retning for $z < 0$.



Absoluttverdien av magnetfeltet kan ikke avhenge av x eller y når det strømførende planet er uendelig stort. Dessuten må B være like stor en avstand z over xy-planet som en avstand z under. ($B_+ = B_- = B$, se figuren nedenfor) Da skulle vi ha det beste valget av amperekurve klart: Et rektangel med flatenormal i positiv y-retning, symmetrisk plassert i forhold til xy-planet:



Når integrasjonsveien velges som vist i figuren, er strømmen omsluttet av amperekurven *positiv*, ifølge høyrehåndsregelen. Med en lengde L i x-retningen blir den omsluttede strømmen $I_{\text{in}} = i \cdot L$. Amperes lov gir dermed:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \, d\boldsymbol{l} = 2 \cdot B \cdot L = \mu_0 i \cdot L$$

eller

$$B = \mu_0 i/2$$

(På de vertikale bitene av amperekurven er $\boldsymbol{B} \perp d\boldsymbol{l}$ så disse gir null bidrag til integralet.)
Alternativt kunne vi først ha lagt hele ampererektangelet på en side av xy-planet. Da hadde vi hatt null omsluttet strøm, og dermed fått at B måtte være uavhengig av z. I neste omgang legger vi amperekurven slik at den omslutter en del av xy-planet, og dermed også en viss strøm, og finner det samme som over. Så langt jeg kan se, holder det å bruke Amperes lov *en* gang når vi legger amperekurven symmetrisk om xy-planet.

Oppgave 3

a) Sentripetalakselerasjonen er v_0^2/R mens Coulombkraften er $e^2/4\pi\varepsilon_0 R^2$. Newtons 2. lov gir da

$$m_e \frac{v_0^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e v_0^2}$$

Banedreieimpulsen til elektronet er

$$\boldsymbol{L}_0 = m_e\, \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}_0 = m_e R\, v_0\, \hat{z}$$

mens dets magnetiske dipolmoment er

$$\boldsymbol{m}_0 = I\boldsymbol{A} = -\frac{e}{2\pi R/v_0} \cdot \pi R^2\, \hat{z} = -\frac{1}{2} e v_0 R\, \hat{z} = -\frac{e}{2m_e} \boldsymbol{L}_0$$

b) Den valgte retningen på $\boldsymbol{B}$ fører til at den magnetiske kraften $\boldsymbol{F}_m = -e\, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ blir rettet innover mot kjernen, dvs i samme retning som den tiltrekkende Coulombkraften. Med uendret baneradius R bestemmes dermed hastigheten v av ligningen

$$m_e \frac{v^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + evB$$

Dette er en annengradsligning for v,

$$v^2 - \frac{eBR}{m_e}\, v - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R} = 0,$$

med løsning

$$v = \frac{eBR}{2m_e} + \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R} + \left(\frac{eBR}{2m_e}\right)^2}$$

(Løsningen med negativt fortegn foran kvadratroten er negativ og ikke aktuell.)
La oss gå tilbake og se på hastigheten uten magnetfelt:

$$v_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R}}$$

Vi ser umiddelbart at $v > v_0$. Det betyr at det magnetiske dipolmomentet

$$\boldsymbol{m} = -\frac{1}{2} evR \, \hat{z}$$

er større enn før vi skrudde på magnetfeltet. Med andre ord, *endringen*

$$\Delta \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_0$$

er motsatt rettet det ytre magnetfeltet.

Hvis magnetfeltet istedet var rettet nedover, $\boldsymbol{B} = -B \, \hat{z}$, ville den magnetiske kraften bli rettet radielt *utover*, dvs i motsatt retning av Coulombkraften, slik at tilleggsleddet evB i bevegelsesligningen ville komme inn med motsatt fortegn. Dermed ville den nye hastigheten v ha blitt mindre enn v_0, og det magnetiske dipolmomentet også mindre enn før vi skrudde på magnetfeltet. Igjen: *Endringen* i magnetisk dipolmoment ville fremdeles ha vært motsatt rettet det ytre feltet.

Konklusjon: Et ytre magnetfelt påvirker elektronets banebevegelse i atomet på en slik måte at det *induserte* magnetiske dipolmomentet, dvs det magnetiske dipolmomentet knyttet til endringen i banebevegelsen, blir motsatt rettet det påtrykte feltet. Altså *diamagnetisme*.