Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1303 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2004

Løsningsforslag til øving 2

Veiledning mandag 19. januar

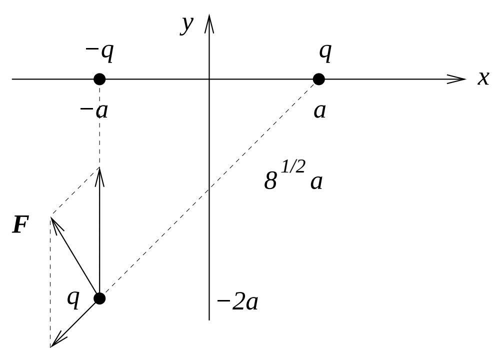
Oppgave 1

a) **A**
Elektroner har *negativ* ladning. Et *underskudd* på N elektroner innebærer derfor en netto *positiv* ladning:

$$Q = +Ne = 3 \cdot 10^{11} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 4.8 \cdot 10^{-8} \text{ C} = 48 \text{ nC}$$

Her står n for nano, dvs 1 nC $= 10^{-9}$ C.

b) **A**
Her er det nok å betrakte retningene på delkreftene som bidrar:



Med Pytagoras har vi at avstanden mellom de to positive ladningene er $\sqrt{8}a$. Ettersom Coulombkraften er proporsjonal med $1/r^2$, må da kraften mellom de to positive bli halvparten så stor som kraften mellom den negative og den positive. Vektorsummen blir som vist i figuren, altså en total kraft $\boldsymbol{F}$ med *negativ* x-komponent og *positiv* y-komponent.

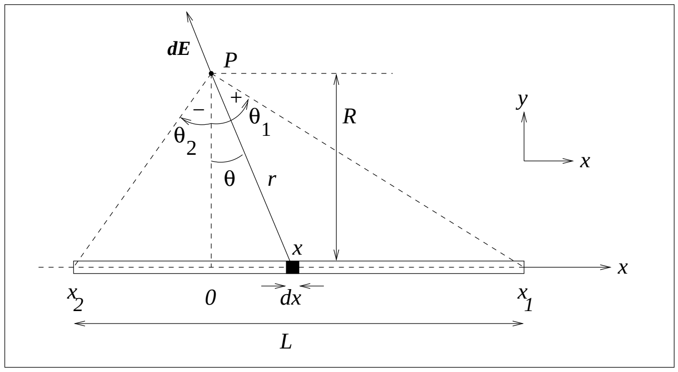
c) **B**
Her er det bare avstanden mellom to ladninger som endres. Vi har derfor:

$$F = k/r^2, \quad F' = k/(1.2r)^2 = k/1.44r^2 = 0.69k/r^2 = 0.69F$$

Oppgave 2

a) Med “linjeladning” (dvs: ladning pr lengdeenhet) λ må ladningene dq og Q på henholdsvis en liten lengde dx og på hele staven bli

$$dq = \lambda\, dx \qquad Q = \lambda L$$



b) Elektrisk felt fra lengdeelement dx i posisjon x:

$$d\boldsymbol{E} = \frac{\lambda\, dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = A\frac{dx}{r^2}\hat{r}$$

der vi har innført $A = \lambda/4\pi\varepsilon_0$. Fra figuren ser vi at denne vektoren har komponentene

$$dE_x = -dE\sin\theta = -\frac{A\,dx}{r^2}\sin\theta \qquad dE_y = dE\cos\theta = \frac{A\,dx}{r^2}\cos\theta$$

Her har vi valgt $x = 0$ når $\theta = 0$, og fortegnet stemmer med oppgaveteksten, dvs $\theta > 0$ når $x > 0$.

Vi bruker tipset i oppgaven og uttrykker dx og $1/r^2$ ved vinkelen θ:

$$\begin{aligned}
x &= R\tan\theta \;\;\Rightarrow\;\; dx = \frac{Rd\theta}{\cos^2\theta} \\
r &= \frac{R}{\cos\theta} \;\;\Rightarrow\;\; \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\theta}{R^2} \\
\Rightarrow \frac{dx}{r^2} &= \frac{d\theta}{R}
\end{aligned}$$

De søkte komponentene E_x og E_y av feltet $\boldsymbol{E}$ i punktet P fra hele staven får vi ved å integrere dE_x og dE_y:

$$\begin{aligned}
E_x &= \int dE_x = -\frac{A}{R}\int_{\theta_2}^{\theta_1}\sin\theta d\theta = \frac{A}{R}\Big|_{\theta_2}^{\theta_1}\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \\
E_y &= \int dE_y = \frac{A}{R}\int_{\theta_2}^{\theta_1}\cos\theta d\theta = \frac{A}{R}\Big|_{\theta_2}^{\theta_1}\sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)
\end{aligned}$$

c) Med P like langt fra stavens to ender er $\theta_1 = -\theta_2$ og følgelig $\cos\theta_1 - \cos\theta_2 = 0$ og $\sin\theta_1 - \sin\theta_2 = 2\sin\theta_1 = L/\sqrt{R^2 + L^2/4}$. Dermed:

$$E_x = 0$$

og

$$E = E_y = \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 R\sqrt{R^2 + L^2/4}}$$

Langt unna staven, dvs $R \gg L$: Vi kan nå erstatte kvadratroten med R, idet vi kan neglisjere $L^2/4$ i forhold til R^2. Vi får da:

$$E \simeq \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Dette er det samme som feltet fra en punktladning Q i avstand R. Ikke uventet: Langt unna ser staven essensielt ut som en punktladning med total ladning $Q = \lambda L$.

d) En uendelig lang stav oppnår vi ved å la $\theta_2 \to -\pi/2$ og $\theta_1 \to \pi/2$. Da blir igjen $E_x = 0$ og følgelig

$$E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

Med andre ord: Feltet fra en uendelig lang linjeladning faller av som en over avstanden R.

Oppgave 3

a) Arealet av en tynn ring med radius R og bredde dR er $dA = 2\pi R\,dR$, slik at ladningen på en slik ring blir

$$dq = \sigma\,dA = 2\pi\sigma R\,dR$$

Arealet av skiva er $A = \pi R_0^2$, så skivas totale ladning blir

$$Q = \sigma A = \pi\sigma R_0^2$$

Hvis en ikke husker hva arealet av ei sirkelformet skive er, kan en selvsagt bestemme totalladningen Q ved å integrere dq:

$$Q = \int dq = \int_0^{R_0} 2\pi\sigma R\,dR = 2\pi\sigma \left.\vphantom{\frac{R^2}{2}}\right|_0^{R_0} \frac{R^2}{2} = \pi\sigma R_0^2$$

Og om en heller ikke husker hva omkretsen av en ring er, kan ladningen på den tynne ringen bestemmes ved å starte med en liten vinkel $d\phi$ og arealet avgrenset mellom R og $R+dR$. Dette arealet er $Rd\phi \cdot dR$, og integrerer vi dette uttrykket over ϕ fra 0 til 2π, får vi nettopp $2\pi R\,dR$ som blir arealet av den tynne ringen med radius R og bredde dR.

b) Vi deler skiva opp i (infinitesimalt) tynne ringer med bredde dR (se figur nedenfor). Alle punkter på ringen ligger i samme avstand r fra punktet på z-aksen. Diametralt motsatte punkter (evt arealer dA) fører til at $x-$ og y-komponentene til feltet forsvinner (jfr eksemplet fra forelesningene). z-komponenten blir

$$dE_z = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

Da r er konstant rundt hele ringen, kan en la dQ være ladningen på hele den tynne ringen:

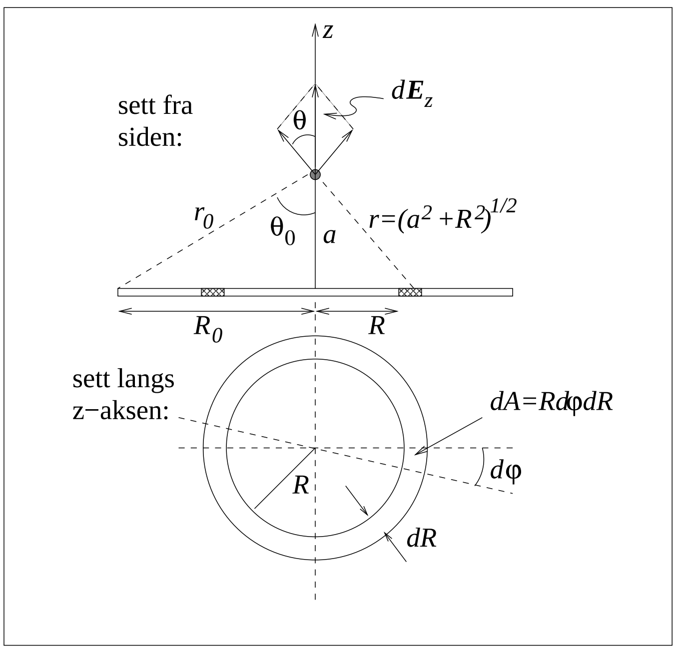
$$dQ = \sigma R\,dR\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi\sigma R\,dR$$

Dermed blir feltet fra hele skiva

$$E_z = \int dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{R_0}\frac{2\pi\sigma Ra\,dR}{(a^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}\Bigg|_0^{R_0}\frac{(-1)}{\sqrt{a^2+R^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+R_0^2}}\right)$$

Her har vi benyttet at

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}$$



Et alternativ ville ha vært å bruke vinkelen θ som integrasjonsvariabel:

$$\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{R}{a} \quad\Rightarrow\quad d(\tan\theta) = \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{dR}{a}\\
r &= \frac{a}{\cos\theta}\\
\int_0^{R_0}\frac{R\,dR}{r^2}\cos\theta &= \int_0^{\theta_0}\left(\frac{\cos\theta}{a}\right)^2 a\tan\theta\frac{a\,d\theta}{\cos^2\theta}\cos\theta = \int_0^{\theta_0}\sin\theta\,d\theta\\
&= 1-\cos\theta_0 = 1-\frac{a}{r_0} = 1-\frac{a}{\sqrt{a^2+R_0^2}}
\end{aligned}$$

der r_0 og θ_0 er definert i figuren over.

c) Når $a \gg R_0$, kunne en i første omgang (som i oppgave 1c) tenke seg å erstatte $\sqrt{a^2 + R_0^2}$ med a. Da får vi imidlertid bare den "trivielle" løsningen $E_z = 0$, mens vi er interessert i det dominerende ikke-forsvinnende bidraget til E_z. Det betyr at vi må rekkeutvikle $\sqrt{a^2 + R_0^2}$ og ta med så mange ledd at vi alt i alt ender opp med noe som er forskjellig fra null:

$$
\begin{aligned}
E_z &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{a\sqrt{1 + \frac{R_0^2}{a^2}}}\right) \\
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \left(1 - \frac{R_0^2}{2a^2} + \cdots\right)\right) \\
&\simeq \frac{\sigma R_0^2}{4\varepsilon_0 a^2} \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}
\end{aligned}
$$

Her har vi brukt tilnærmelsen som var gitt i oppgaveteksten, $(1+\alpha)^{-1/2} \simeq 1 - \alpha/2$, med $\alpha = R_0^2/a^2 \ll 1$.
Dette er feltet i avstand a fra en punktladning $Q = \sigma A$, der $A = \pi R_0^2$ er arealet av sirkelskiva. Som forventet: Er vi tilstrekkelig langt borte, ser vi ikke forskjell på ei ladet skive og en punktladning.

I den motsatte grensen, $a \ll R_0$, kan vi neglisjere leddet $a/\sqrt{a^2 + R_0^2}$ i forhold til 1. Vi får da

$$
E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}
$$

Altså et uniformt elektrisk felt som verken avhenger av avstanden a eller skivas utstrekning R_0. Dermed må dette være feltet utenfor et *uendelig stort plan* med ladningstetthet σ. Det er kanskje ikke umiddelbart opplagt at feltet da blir *uavhengig av avstanden* til planet, men slik er det altså! Selv om vi i praksis ikke har uendelig store flater til rådighet, er dette et viktig resultat: Med et stort ladet plan kan vi generere et tilnærmet uniformt elektrisk felt i nærheten av planet, og ikke for nær planets ytterkanter. Vi skal bruke dette resultatet mange ganger utover i kurset.