

Løsningsforslag til øving 4

Veiledning mandag 2. februar

Oppgave 1

Potensialforskjellen ΔV mellom to punkter er gitt ved

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

I denne oppgaven har vi et uniformt elektrisk felt $\mathbf{E} = E_0 \hat{x}$, så vi kan skrive

$$\Delta V = -E_0 \hat{x} \cdot \int_A^B d\mathbf{l}$$

der punktet A er origo, $(0, 0)$ og B er de tre punktene gitt i oppgaveteksten. Vi får:

(i)

$$\int_A^B d\mathbf{l} = \int_{(0,0)}^{(a,0)} d\mathbf{l} = a \hat{x}$$

slik at

$$\Delta V = -E_0 \hat{x} \cdot a \hat{x} = -E_0 a$$

(ii)

$$\int_A^B d\mathbf{l} = \int_{(0,0)}^{(0,a)} d\mathbf{l} = a \hat{y}$$

slik at

$$\Delta V = -E_0 \hat{x} \cdot a \hat{y} = 0$$

(iii)

$$\int_A^B d\mathbf{l} = \int_{(0,0)}^{(a,a)} d\mathbf{l} = a \hat{x} + a \hat{y}$$

slik at

$$\Delta V = -E_0 \hat{x} \cdot (a \hat{x} + a \hat{y}) = -E_0 a$$

Oppgave 2

a) Med vårt valg av polarvinkel θ ser vi fra figuren at

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \\ z &= r \cos \theta \\ r &= \sqrt{x^2 + z^2} \end{aligned}$$

b) Vi bruker superposisjonsprinsippet for å bestemme potensialet fra de to punktladningene. Med punktet (x, z) i en avstand r_1 fra q og r_2 fra $-q$ får vi

$$\begin{aligned} V(x, z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (z - a/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z + a/2)^2}} \right) \end{aligned}$$

Avstandene r_1 og r_2 uttrykt ved x og z ser vi direkte fra figuren.

Potensialet på x -aksen blir

$$V(x, 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2/4}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2/4}} \right) = 0$$

Potensialet på z -aksen blir

$$V(0, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|z - a/2|} - \frac{1}{|z + a/2|} \right)$$

Legg merke til at vi her må bruke absoluttverditegn hvis vi vil ha *ett* uttrykk som gjelder på *hele* z -aksen. Med $z > a/2$:

$$\frac{1}{|z - a/2|} - \frac{1}{|z + a/2|} = \frac{1}{z - a/2} - \frac{1}{z + a/2} = \frac{a}{z^2 - a^2/4}$$

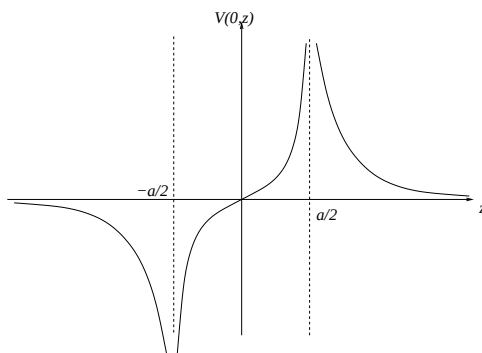
Med $z < -a/2$:

$$\frac{1}{|z - a/2|} - \frac{1}{|z + a/2|} = -\frac{1}{z - a/2} + \frac{1}{z + a/2} = -\frac{a}{z^2 - a^2/4}$$

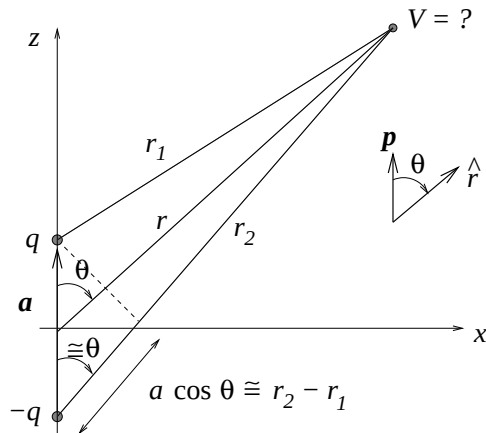
Med $-a/2 < z < a/2$:

$$\frac{1}{|z - a/2|} - \frac{1}{|z + a/2|} = -\frac{1}{z - a/2} - \frac{1}{z + a/2} = -\frac{2z}{z^2 - a^2/4} = \frac{2z}{a^2/4 - z^2}$$

Skisse av $V(0, z)$:



c) Vi bruker tipset gitt i oppgaveteksten, samt betraktning av følgende figur, og får:



$$\begin{aligned}
 V(r, \theta) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \\
 &\simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a \cos \theta}{r^2} \\
 &= \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\
 &= \frac{pr \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\
 &= \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}
 \end{aligned}$$

Vi kan alternativt gå litt saktere fram: Fra figuren ser vi at

$$\begin{aligned}
 r_1 &\simeq r - \frac{a}{2} \cos \theta \\
 r_2 &\simeq r + \frac{a}{2} \cos \theta
 \end{aligned}$$

Når $r \gg a$ kan vi rekkeutvikle både $1/r_1$ og $1/r_2$ omkring $1/r$ og får:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} &\simeq \frac{1}{r - \frac{a}{2} \cos \theta} - \frac{1}{r + \frac{a}{2} \cos \theta} \\
 &= \frac{1}{r} \left[\left(1 - \frac{a \cos \theta}{2r} \right)^{-1} - \left(1 + \frac{a \cos \theta}{2r} \right)^{-1} \right] \\
 &\simeq \frac{1}{r} \left[1 + \frac{a \cos \theta}{2r} - 1 + \frac{a \cos \theta}{2r} \right] \\
 &= \frac{a \cos \theta}{r^2}
 \end{aligned}$$

Er det så *rimelig* at potensialet fra en elektrisk dipol faller av raskere enn potensialet fra en punktladning (dvs en elektrisk “monopol”)? Det er det, fordi dipolens negative og positive ladning bidrar med motsatt fortegn til det totale potensialet. Dermed vil bidragene til potensialet fra de to punktladningene delvis oppheve hverandre. (På x -aksen vil de to bidragene *eksakt* oppheve hverandre.)

Ekstranøtten (ikke så viktig, mest for “moro skyld”):

I første omgang kunne en kanskje tenke seg å fortsette rekkeutviklingen ovenfor, og ta med så mange ledd at vi får tak i dominerende korreksjon. Tar vi med ett ledd til, får vi ingenting nytt, i og med at det neste leddet vil opptre to ganger og med motsatt fortegn og dermed kansellere. Vi må ta med to ledd til:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \left[\left(1 - \frac{a \cos \theta}{2r} \right)^{-1} - \left(1 + \frac{a \cos \theta}{2r} \right)^{-1} \right] \\ &= \frac{1}{r} \left[1 + \frac{a \cos \theta}{2r} + \left(\frac{a \cos \theta}{2r} \right)^2 + \left(\frac{a \cos \theta}{2r} \right)^3 + \dots - \left(1 - \frac{a \cos \theta}{2r} + \left(\frac{a \cos \theta}{2r} \right)^2 - \left(\frac{a \cos \theta}{2r} \right)^3 + \dots \right) \right] \\ &= \frac{a \cos \theta}{r^2} - \frac{a^3 \cos^3 \theta}{4r^4} + \dots \\ &= \frac{a \cos \theta}{r^2} \left(1 - \frac{a^2 \cos^2 \theta}{4r^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

Her brukte vi rekkeutviklingen $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ (som gjelder når $|x| < 1$). Ikke noe dårlig forsøk dette, men det er en liten hake ved det hele: Utgangspunktet for hele rekkeutviklingen var i seg selv en tilnærming, nemlig

$$\begin{aligned} r_1 &\simeq r - \frac{a}{2} \cos \theta \\ r_2 &\simeq r + \frac{a}{2} \cos \theta \end{aligned}$$

Og feilen vi gjør i disse tilnærmelsene er av samme størrelsesorden som det korreksjonsleddet vi er på jakt etter!

Løsningen ligger i å gå helt tilbake til det eksakte uttrykket for V , med r_1 og r_2 uttrykt ved de kartesiske koordinatene x og z . Regningen er ikke direkte vanskelig, men såpass kronglete at jeg ikke tror jeg tar med noen flere detaljer her. Hvis jeg har regnet riktig, hvilket på ingen måte er sikkert, blir svaret

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{a \cos \theta}{r^2} \left[1 - \frac{3a^2}{8r^2} \left(1 - \frac{5}{3} \cos^2 \theta \right) + \dots \right]$$

Her har vi tatt med alle korreksjoner som er en *størrelsesorden* a^2/r^2 mindre enn det dominerende bidraget. Neste ledd i rekken vil bli ytterligere redusert, med en eller annen potens av den lille størrelsen a/r . Det første leddet som vi *ikke* tar med vil alltid være neglisjerbart i forhold til det siste leddet som vi tar med. (I vårt spesielle tilfelle, med unntak av retninger gitt ved $\cos^2 \theta \simeq 3/5$, der vi ser at første korreksjonsledd faktisk forsvinner.)

Oppgave 3

a) **C**

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = m\mathbf{a}$$

Newtons 2. lov! Her er $q = -e$, så elektronets akselerasjon blir

$$\mathbf{a} = -\frac{e}{m}\mathbf{E}$$

altså mot venstre.

b) **C**

$$\Delta V = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

dersom

$$d\mathbf{l} \perp \mathbf{E}$$

c) **D**

A er tull, V er en *skalar* størrelse og det er E som måles i N/C.

d) **A**

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 l} (q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3) \\ &= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{0.5} (50 + 75 + 150) \cdot 10^{-6-6} \\ &= 18 \cdot 10^9 \cdot 275 \cdot 10^{-12} \\ &= 4.95 \text{ J} \end{aligned}$$

e) **C**

Som forrige oppgave, men med $q_2 = -10 \mu\text{C} \Rightarrow$

$$U = 18 \cdot 10^9 \cdot (-50 + 75 - 150) \cdot 10^{-12} = -2.25 \text{ J}$$

f) **B**

$$U = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = e \cdot \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} = e \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{10} = 14.4 \text{ eV}$$

g) **D**

Energibevarelse gir

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV$$

Dvs: Akselerasjon av en partikkel med ladning q og masse m gjennom en potensialforskjell V resulterer i at reduksjon i potensiell energi, qV , gir økning i kinetisk energi, $mv^2/2$. Like stor hastighet for de to partiklene betyr da at

$$\frac{q_\alpha V_\alpha}{m_\alpha} = \frac{q_{\text{Be}} V_{\text{Be}}}{m_{\text{Be}}}$$

med andre ord

$$\frac{V_{\text{Be}}}{V_\alpha} = \frac{q_\alpha m_{\text{Be}}}{q_{\text{Be}} m_\alpha} = \frac{2 \cdot 9}{4 \cdot 4} = \frac{9}{8}$$