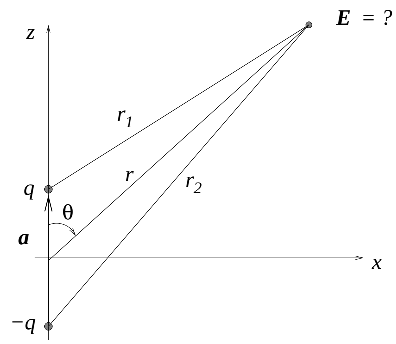
Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1303: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2004

Øving 5

Veiledning: Mandag 9. februar
Innleveringsfrist: Torsdag 12. februar

Oppgave 1



I oppgave 2 i øving 3 betraktet vi en elektrisk dipol, bestående av to punktladninger $\pm q$ lokalisert på z-aksen i $z = \pm a/2$. Vi viste at potensialet V i stor avstand ($r \gg a$) fra dipolen er tilnærmet lik

$$V(r,\theta) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Her er r avstanden fra origo, dvs dipolens midtpunkt, θ er vinkelen mellom z-aksen og $\boldsymbol{r}$, og $p = |\boldsymbol{p}| = qa$ er dipolens elektriske dipolmoment.

a) Ta utgangspunkt i uttrykket for $V(r,\theta)$ og bestem det elektriske feltet $\boldsymbol{E}(r,\theta) = E_r\hat{r} + E_\theta\hat{\theta}$ i stor avstand fra dipolen.
Det oppgis at gradientoperatoren i kulekoordinater er

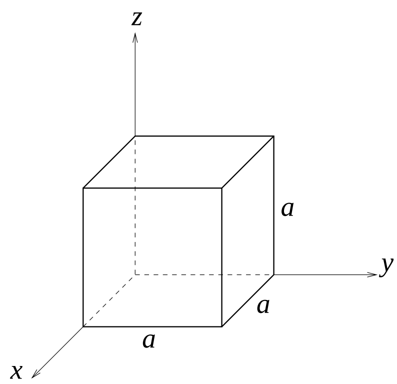
$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

Du får ikke oppgitt noe fasitsvar her, men du kan til en viss grad sjekke om du har regnet riktig ved å se om resultatet virker rimelig for $\theta = 0$ og for $\theta = \pi/2$. Hva med $r = 0$?

b) På grunn av rotasjonssymmetrien omkring z-aksen kan vi f.eks. anta at vi befinner oss i xz-planet. Bestem det elektriske feltet $\boldsymbol{E}(x,z) = E_x\hat{x} + E_z\hat{z}$ uttrykt i kartesiske koordinater for $r \gg a$. Tips: Ta utgangspunkt i uttrykkene for E_r og E_θ i punkt a). Tegn opp en figur og finn sammenhengen mellom koordinatene (x,z) og (r,θ), og feltkomponentene E_x, E_z og E_r, E_θ.
[Fasit: $E_x = 3pxz/4\pi\varepsilon_0(x^2+z^2)^{5/2}$, $E_z = p(2z^2 - x^2)/4\pi\varepsilon_0(x^2+z^2)^{5/2}$.]

c) Bestem også $\boldsymbol{E}(x,z)$ ved først å skrive om $V(r,\theta)$ til $V(x,z)$, og deretter anvende gradientoperatoren i kartesiske koordinater.

Oppgave 2



Figuren over viser en gaussflate (dvs lukket flate) S formet som en kube med sidekanter a. Flaten er plassert i et område hvor det er en elektrisk feltstyrke $\boldsymbol{E}$. I hvert av tilfellene a) – d), bestem total (netto) elektrisk fluks ϕ som passerer gjennom flaten S. Bruk Gauss' lov og bestem i hvert tilfelle også den totale ladningen Q innenfor S.

$$
\begin{aligned}
a)\ \boldsymbol{E} &= C\hat{x} \\
b)\ \boldsymbol{E} &= Cx\hat{x} \\
c)\ \boldsymbol{E} &= Cx^2\hat{x} \\
d)\ \boldsymbol{E} &= C\left(y\hat{x} + x\hat{y}\right)
\end{aligned}
$$

Her er C en (skalar) konstant (og da med varierende enhet).

e) For tilfellet c) skal du bestemme ladningstettheten ρ innenfor S. Ta utgangspunkt i Gauss' lov idet du betrakter et lite (infinitesimalt) volumelement $a^2\,dx$, dvs en tynn skive med tykkelse dx og endeflater med areal a^2, lokalisert mellom x og $x + dx$. (Mer presist: Bruk Gauss' lov på flaten som omslutter dette volumelementet.)

Noen svar: b): $Q = C\varepsilon_0 a^3$ c): $Q = C\varepsilon_0 a^4$ e): $\rho = 2C\varepsilon_0 x$

Oppgave 3

Bruk Gauss' lov til å bestemme det elektriske feltet i avstand r fra en uendelig lang (tynn) stav med ladning λ pr lengdeenhet.
Tips: Utnytt sylindersymmetrien i problemet til å velge en fornuftig gaussflate.
(Sammenlign svaret med det du fant i oppgave 2 d) i øving 2.)

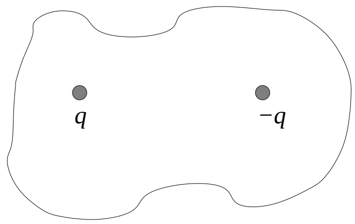
Oppgave 4 (multiple choice)

a) På en lukket flate er det elektriske feltet $\boldsymbol{E}$ overalt rettet *innover*. Da kan vi fastslå at

A flatenormalen $\hat{n}$ over hele flaten er parallell med $\boldsymbol{E}$
B flaten omslutter null netto ladning
C flaten omslutter en netto negativ ladning
D flaten omslutter en netto positiv ladning

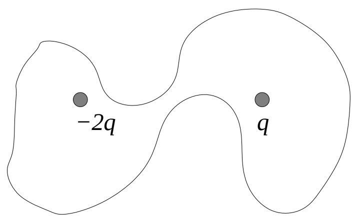
b) Figuren illustrerer en lukket flate som omslutter to punktladninger q og $-q$. Netto elektrisk fluks ut gjennom denne flaten er da

A null
B $-q/\varepsilon_0$
C q/ε_0
D $2q/\varepsilon_0$



c) Figuren illustrerer en lukket flate som omslutter to punktladninger $-2q$ og q. Netto elektrisk fluks ut gjennom denne flaten er da

A null
B $-q/\varepsilon_0$
C q/ε_0
D $2q/\varepsilon_0$



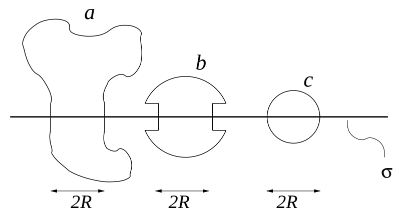
d) Hvor stor er radien til en (kuleformet) ekvipotensialflate på 50 V med en punktladning 10 nC i sentrum? Null potensial velges uendelig langt unna.

A 1.3 m
B 1.8 m
C 3.2 m
D 5.0 m

e) Potensialet i et område er $V(x, y, z) = 100$ V. Det elektriske feltet $\boldsymbol{E}$ i dette området er da

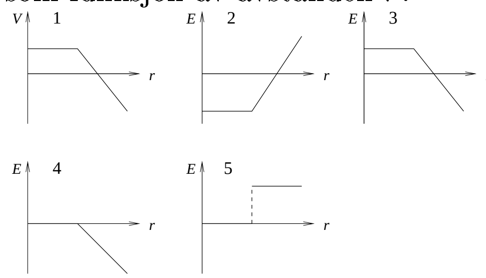
A (100 V/m) $\hat{x}$
B (100 V/m) $\hat{y}$
C (100 V/m) $\hat{z}$
D null

f) En uniformt ladet uendelig stor flate har ladning σ pr flateenhet. Tre gaussflater (lukkede flater) a, b og c er vist i figuren. Alle de tre flatene omslutter en sirkelformet skive med radius R når de krysser den ladete flaten. Ranger de tre lukkede flatene a, b og c i henhold til hvor stor netto elektrisk fluks som passerer ut gjennom dem.



A $a > b > c$
B $a > b = c$
C $a = b = c$
D $a < b < c$

g) Hvis potensialet V som funksjon av avstanden r fra en ladningsfordeling er som vist i graf nr 1, hvilken graf viser da det elektriske feltet E som funksjon av avstanden r?



A 2
B 3
C 4
D 5

h) Potensialet i et område er

$$V(x) = 50 \text{ V} + (15 \text{ V/m})x$$

Det elektriske feltet i dette området er da

A $50 \text{ V } \hat{x}$
B $(15 \text{ V/m})\ x\ \hat{x}$
C $(15 \text{ V/m})\ \hat{x}$
D $-(15 \text{ V/m})\ \hat{x}$

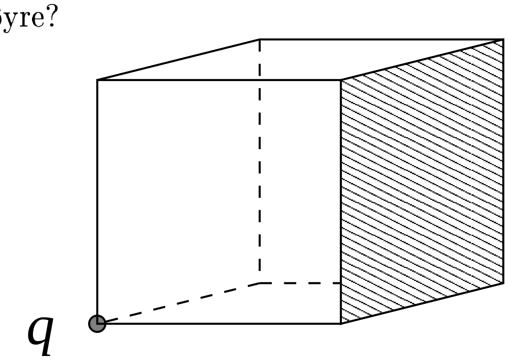
i) Potensialet i et område er

$$V(x, y, z) = (2 \text{ V/m})x + (3 \text{ V/m})y + (4 \text{ V/m})z$$

Da er x-komponenten av det elektriske feltet i dette området

A -2 V/m
B -3 V/m
C -4 V/m
D -9 V/m

j) En punktladning q er plassert i det ene hjørnet av en kube. Hva blir den elektriske fluksen gjennom den skraverte sideflaten i figuren til høyre?



A q/ε_0
B $q/4\varepsilon_0$
C $q/8\varepsilon_0$
D $q/24\varepsilon_0$