Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1303 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2004

Løsningsforslag til øving 6

Veiledning mandag 16. februar

Oppgave 1

a) Maksimalt elektrisk felt på 3 MV/m oppnås med en overflateladningstetthet

$$\sigma_{\text{max}} = \varepsilon_0 E_{\text{max}} = 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^6 = 2.7 \cdot 10^{-5} \text{C/m}^2$$

b) Ei metallkule med radius R og ladning Q har en flateladningstetthet

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

Vi ser at maksimal σ tilsvarer minimal R:

$$R_{\text{min}} = \sqrt{\frac{Q}{4\pi\sigma_{\text{max}}}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi \cdot 2.7 \cdot 10^{-5}}} \simeq 54\text{m}$$

c) På en overflate med atomene ordnet i et regulært kvadratisk gitter med en avstand på 0.3 nm mellom nærmeste naboer opptar hvert overflateatom et areal $A_0 = (0.3 \cdot 10^{-9})^2 = 9 \cdot 10^{-20}\text{m}^2$. Da må antall overflateatomer pr m^2 bli $(9 \cdot 10^{-20})^{-1} = 1.1 \cdot 10^{19}$

[Dersom overflateatomene i stedet var ordnet i et regulært *triangulært* gitter (med samme nærmeste-nabo-avstand 0.3 nm = 3 Å), ville arealet pr overflateatom bli en regulær *sekskant* med sidekanter $\sqrt{3}$ Å. Arealet av en slik sekskant er $9\sqrt{3}/2$ Å$^2 \simeq 7.8 \cdot 10^{-20}$ m^2, som gir ca $1.3 \cdot 10^{19}$ atomer pr m^2. Med andre ord, litt tettere pakket enn med kvadratisk gitter!]

d) Med en ladning pr flateenhet lik $\sigma_{\text{max}} = 2.7 \cdot 10^{-5}\text{C/m}^2$ og $1.1 \cdot 10^{19}$ overflateatomer pr m^2, har vi en midlere ladning pr overflateatom lik $2.7 \cdot 10^{-5}/1.1 \cdot 10^{19} = 2.45 \cdot 10^{-24}$C, som er $2.45 \cdot 10^{-24}/1.6 \cdot 10^{-19} = 1.5 \cdot 10^{-5}$ av ladningen til et elektron. Dette må da også representere andelen av overflateatomer som har fått ett ekstra elektron.

Oppgave 2

Vi har at $E = 0$ overalt inne i metallet i elektrostatisk likevekt. (Se forelesningene.) Det betyr, ifølge Gauss' lov, at en gaussflate S (lukket flate) som omslutter hulrommet, og som i sin helhet ligger inne i lederen, omslutter null netto ladning (q_{in}):

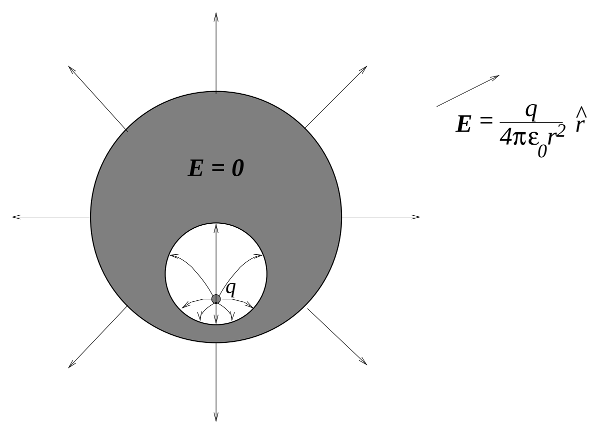
$$E = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{\text{in}} = \varepsilon_0 \oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

Denne gaussflaten kan legges vilkårlig nært inntil hulrommets overflate, så konklusjonen må bli at det totalt er indusert en fri ladning $-q$ på hulrommets overflate. Da blir nemlig total ladning innenfor gaussflaten lik $q - q = 0$.

Denne induserte ladningen vil fordele seg på hulrommets overflate på en slik måte at det elektriske feltet forsvinner overalt inne i lederen. Med andre ord, bidraget til feltet inne i lederen fra punktladningen q må presis kanselleres av bidraget fra den induserte ladningen $-q$. Da er det vel mer eller mindre opplagt (?) at vi må få størst indusert ladning nederst, der punktladningen ligger nært overflaten, og minst indusert ladning øverst, der punktladningen ligger lenger unna overflaten.
Da lederen har null netto ladning, må vi ha fått indusert en ladning q på lederens ytre overflate. (Husk: Ingen netto ladning inne i en leder i likevekt!) Denne ladningen vil fordele seg jevnt utover den ytre overflaten fordi "asymmetrien" forårsaket av punktladningen inne i hulrommet oppheves av den induserte ladningen $-q$ på hulrommets overflate.
På utsiden av kula "ser" vi dermed rett og slett en kulesymmetrisk overflateladning, slik at det elektriske feltet utenfor kula blir

$$\boldsymbol{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

der r er avstanden fra sentrum av kula. Elektriske feltlinjer må bli omtrent slik:



Vi har valgt å tegne 8 feltlinjer pr ladning q. Alle 8 feltlinjer som starter på punktladningen må ende opp på hulrommets overflate, og slik at de står normalt på overflaten. (Elektrisk felt alltid normalt på overflaten!) Inne i lederen er $E = 0$, så her har vi ingen feltlinjer. På den ytre overflaten har vi en ladning q jevnt fordelt utover, så her får vi igjen 8 feltlinjer, radielt rettet utover.
Kommentar: Det fulgte umiddelbart av Gauss' lov og av det faktum at $E = 0$ inne i lederen at den totale induserte ladningen blir hhv $-q$ og q på indre og ytre overflate. Men vi har vel strengt tatt ikke ført noe skikkelig argument for hvordan disse induserte overflateladningene vil *fordele seg*. En ting er sikkert: *Tilsammen* må ladningene fordele seg slik at vi får $E = 0$ overalt inne i lederen. Jeg har rett og slett *påstått* at punktladningen q og ladningen $-q$ på hulrommets overflate sørger for dette *alene*, uten "hjelp" av ladningen q på ytre overflate. Kan vi være sikre på at dette i det hele tatt er mulig? Jo: Tenk deg en gigantisk metallkule med et lite hulrom dypt inne i kula, og med en punktladning plassert i hulrommet slik som her. Nå er all ladning på ytre overflate så langt unna hulrommet at for å oppnå $E = 0$ inne i lederen i nærheten av hulrommet, må ladningen $-q$ på hulrommets overflate kansellere feltet fra punktladningen alene. Vi kan altså fastslå at det *er mulig* å oppnå $E = 0$ inne i lederen uten bruk av ladningen på ytre overflate. Men da kan vi faktisk konkludere med at dette er den *eneste* muligheten,

uansett om kula er stor eller liten. Man har nemlig såkalte *entydighetsteorem* i elektrostatikken som garanterer at en *mulig* ladningsfordeling også er den *eneste* mulige. (Ikke pensum! Men se f.eks. Griffiths, kapittel 3 hvis du er interessert.)

Oppgave 3

a) På den positive ladningen virker en kraft $\boldsymbol{F}_+ = q\boldsymbol{E}$ og på den negative ladningen virker en kraft $\boldsymbol{F}_- = -q\boldsymbol{E}$. Total kraft blir summen av disse:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_+ + \boldsymbol{F}_- = q\boldsymbol{E} - q\boldsymbol{E} = 0$$

b)

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r}_+ \times \boldsymbol{F}_+ + \boldsymbol{r}_- \times \boldsymbol{F}_- = \frac{\boldsymbol{a}}{2} \times (q\boldsymbol{E}) + \left(-\frac{\boldsymbol{a}}{2}\right) \times (-q\boldsymbol{E}) = q\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$$

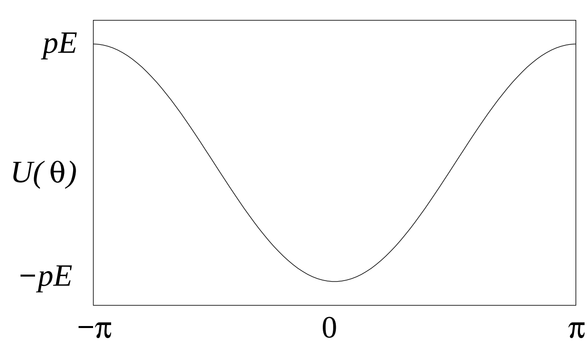
Vi har valgt positiv retning for vinkelen θ som vist i figuren i oppgaveteksten. Vektoren $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$ vil da for positive θ mellom 0 og 180 grader peke inn i papirplanet, dvs i negativ z-retning. Da må vi inkludere et negativt fortegn:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E} = -pE \sin\theta \ \hat{z}$$

c) Med $\tau = -\partial U/\partial\alpha$ har vi $dU = -\tau \ d\alpha$. Det betyr at en liten dreining av dipolen en vinkel $d\alpha$ under påvirkning av dreiemomentet τ resulterer i en endring dU i potensiell energi gitt ved $-\tau \ d\alpha$. Potensiell energi for en gitt verdi av vinkelen θ mellom $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{p}$, *i forhold til* en valgt referanse $U(\theta_0)$, blir da

$$\begin{aligned}
U(\theta) &= \int_{\theta_0}^{\theta} dU \\
&= -\int_{\theta_0}^{\theta} \tau(\alpha) \ d\alpha \\
&= pE \int_{\theta_0}^{\theta} \sin\alpha \ d\alpha \\
&= pE\,(\cos\theta_0 - \cos\theta) \\
&= -pE\cos\theta
\end{aligned}$$

Her valgte jeg å sette $U(0) = -pE$, dvs $\theta_0 = \pi/2$.
Skisse:



Vi har minimal U, og følgelig stabil likevekt for $\theta = 0$, dvs for dipolen orientert slik at $\boldsymbol{p}$ er parallell med $\boldsymbol{E}$.

Konklusjon: Elektriske dipoler, f.eks. polare molekyler i et dielektrikum, retter seg inn langs det ytre ("påtrykte") elektriske feltet.