Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1303: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2004

Øving 6

Veiledning: Mandag 16. februar
Innleveringsfrist: Torsdag 19. februar

Oppgave 1

Det største elektriske feltet som kan opprettholdes i luft er ca 3 MV/m. Større verdier gir overslag (såkalt coronautladning). I forelesningene har vi vist at ei metallkule vil ha all nettoladning samlet på overflaten. Vi har også vist at det elektriske feltet ved overflaten er $E = \sigma/\varepsilon_0$, der σ er overflateladningstettheten.

a) Hva er da den maksimale overflateladningstettheten ei metalloverflate kan holde på uten at vi får overslag?

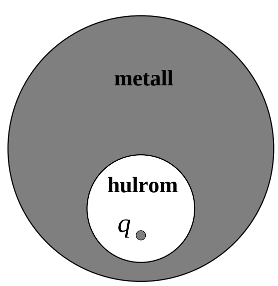
b) Hva er den minste radien ei metallkule kan ha for å holde på en ladning 1 C?
[Riktig svar er enten 25 nm, 1.5 mm, 6.6 cm, 54 m eller 2.3 km]

c) Et typisk metall består av atomer ordnet i en krystallstruktur med en avstand på ca 0.3 nm mellom nærmeste naboatomer. Hva er midlere antall overflateatomer pr m^2? Du kan anta at overflateatomene er ordnet i et regulært *kvadratisk* gitter. [Ekstra: Blir svaret det samme dersom overflateatomene er ordnet i et regulært *triangulært* gitter?]

d) Overflateladningen i punkt a) befinner seg på metallet beskrevet i punkt c). Du kan anta at all nettoladning er fordelt kun i det ytterste atomlaget på overflaten. Hvor stor andel av atomene i dette laget har da fått ett ekstra elektron?
[Riktig svar er enten $3.3 \cdot 10^{-9}$, $1.5 \cdot 10^{-5}$, $4.3 \cdot 10^{-3}$ eller 0.17]

Oppgave 2

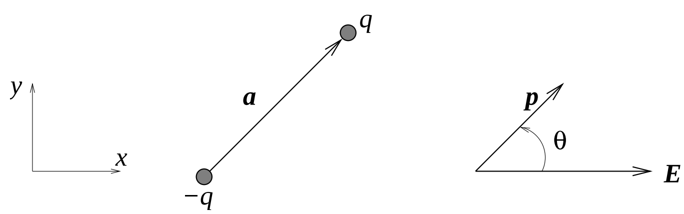
Figuren nedenfor viser et snitt gjennom sentrum av ei metallkule med et kuleformet (men ikke konsentrisk plassert) hulrom inni. I hulrommet er det en positiv punktladning q (plassert i snittet gjennom sentrum av kuleflatene, men ikke i sentrum av hulrommet). Metallkula er ellers elektrisk nøytral slik at hele systemets nettoladning er q. Punktladningen holdes fast i den angitte posisjonen.



Hva kan du si om fordelingen av (fri) ladning i metallkula når vi har elektrostatisk likevekt? [Tips 1: Hva er det elektriske feltet inne i metallet? Tips 2: Anvend Gauss' lov i din argumentasjon.]
Skisser feltlinjer for det elektriske feltet $\boldsymbol{E}$.
Kan du tenke deg hva $\boldsymbol{E}$ blir utenfor kula? [Svaret er ganske enkelt, men begrunnelsen for svaret er kanskje ikke like enkel?]

Oppgave 3 ($\simeq$ oppgave 3, kontinuasjonseksamen 15. august 2003)

En elektrisk dipol består av to punktladninger q og $-q$ med en (fast) innbyrdes avstand a. Dipolen er plassert i et homogent "ytre" elektrostatisk felt $\boldsymbol{E} = E\hat{x}$. Anta at dipolen ligger i xy-planet og slik at vektoren $\boldsymbol{a}$ fra $-q$ til q, og dermed også dipolmomentet $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{a}$, danner en vinkel θ med $\boldsymbol{E}$. Vi regner *positiv θ mot urviseren*, fra $\boldsymbol{E}$ til $\boldsymbol{p}$, som vist i figuren.



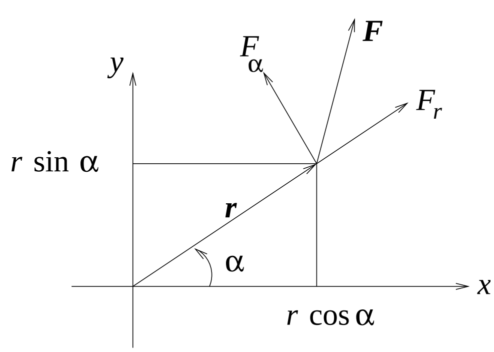
a) Hva blir den totale kraften (fra det ytre feltet $\boldsymbol{E}$) på dipolen?

b) Fra mekanikken husker vi at *dreiemomentet* $\boldsymbol{\tau}$ omkring en bestemt akse er definert som $\boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$, der $\boldsymbol{r}_i$ er "armen" fra aksen og ut til posisjonen der kraften $\boldsymbol{F}_i$ angriper.
Vis at for den elektriske dipolen i det homogene feltet blir dreiemomentet omkring aksen som går normalt gjennom dipolens midtpunkt

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{p} = -pE\sin\theta\ \hat{z}$$

c) Til slutt skal du finne et uttrykk for den potensielle energien $U(\theta)$ til den elektriske dipolen ovenfor. Skisser også $U(\theta)$. Hvilken orientering av dipolen i forhold til $\boldsymbol{E}$ representerer en stabil likevekt?

Til hjelp på punkt c):
La oss for enkelhets skyld holde oss i xy-planet. En kraft $\boldsymbol{F} = F_x\ \hat{x} + F_y\ \hat{y} = F_r\ \hat{r} + F_\alpha\ \hat{\alpha}$ som angriper i en posisjon $\boldsymbol{r} = r\cos\alpha\ \hat{x} + r\sin\alpha\ \hat{y}$ vil da gi et dreiemoment $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ omkring z-aksen:



Vi vet dessuten at kraften $\boldsymbol{F}$ kan "avledes' fra den potensielle energien U ved hjelp av gradientoperatoren: $\boldsymbol{F} = -\nabla U$. I polarkoordinater (r, α) har vi

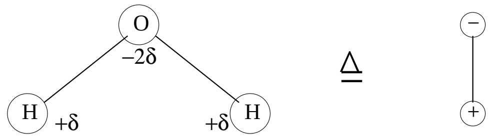
$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\alpha}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \alpha}$$

Da klarer du kanskje å vise at

$$\tau \; (= |\boldsymbol{\tau}|) \; = -\partial U/\partial \alpha,$$

og i neste omgang hvordan U i vårt tilfelle avhenger av vinkelen mellom $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{p}$.

Kommentar: En elektrisk isolator, dvs et *dielektrikum*, består typisk av molekyler med null nettoladning, men med en intern ladningsfordeling (dvs plassering av atomkjerner og elektroner) som er "skjev". Slike *polare* molekyler kan betraktes som elektriske dipoler. Eksempel: Vann, H_2O.



Siden oksygen er mer elektronegativt (dvs, det har større lyst på ekstra elektroner) enn hydrogen, vil elektronfordelingen være noe forskjøvet i retning oksygenatomet i et vannmolekyl. Det betyr at i nærheten av O-atomet har vi et lite overskudd av negativ ladning, f.eks. -2δ. På grunn av elektrisk nøytralitet totalt sett (og pga symmetrien i vannmolekylet), må vi da ha et lite overskudd, $+\delta$, av positiv ladning i nærheten av hvert H-atom.
Et dielektrikum kan også bestå av atomer eller molekyler *uten* en slik polar ladningsfordeling, dvs med elektrisk dipolmoment $p = 0$. Men dersom et slik materiale plasseres i et ytre elektrisk felt, vil atomenes elektroner og kjerner trekkes i hver sin retning, slik at det *induseres* et elektrisk dipolmoment $\boldsymbol{p}_{\text{ind}}$ med retning langs $\boldsymbol{E}$. *Størrelsen* på slike induserte dipolmoment er typisk liten i forhold til *permanente* dipolmoment (som i vann), men *kvalitativt* blir oppførselen den samme.
Dermed: Har du forstått denne oppgaven, har du essensielt forstått hvordan et dielektrikum påvirkes av et ytre elektrisk felt.

Kryssprodukt mellom vektorer
Kryssproduktet mellom to vektorer er en tredje vektor med retning normalt på begge de to første, og med absoluttverdi lik produktet av absoluttverdien av de to første multiplisert med sinus til vinkelen mellom disse. Altså:

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

med absoluttverdi

$$c = |\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin\theta = a \cdot b \cdot \sin\theta$$

Eksempel: $\boldsymbol{a} = 10\hat{x}$ og $\boldsymbol{b} = 5\hat{y}$ gir

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 50\hat{z}$$