Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1303: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2004

Sammendrag, uke 5 (28. og 30. januar)

Sammenhengen mellom elektrisk potensial V og elektrisk felt $\boldsymbol{E}$ [FGT 25.2; YF 24.3; AF 21.10; LHL 19.9; G 2.3.1]

En ladning q som påvirkes av en elektrostatisk kraft $\boldsymbol{F}$ har en forskjell i potensiell energi

$$\Delta U = U_B - U_A = -\int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$$

mellom punktene A og B. Da må den *elektriske potensialforskjellen* ΔV mellom punktene A og B være

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q} = -\int_A^B \frac{\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}}{q} = -\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

Merk: Bare *forskjeller* i elektrisk potensial (og potensiell energi) har fysisk betydning. Kan fritt velge nullpunkt for potensialet. Vanlig valg: $V(r \to \infty) = 0$. Dermed, for punkt P:

$$V_P = -\int_\infty^P \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

(Vi kan ikke alltid velge $V(r \to \infty) = 0$. Det skal vi se eksempler på etterhvert.)

Elektrisk potensial fra punktladning (Coulombpotensialet) [FGT 25.3; YF 24.3; AF 21.11; LHL 19.9; G 2.3.4]:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Elektrisk potensial fra kontinuerlige ladningsfordelinger:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

med

$$dq = \begin{cases} \rho(x,y,z)\; dV & (3D) \\ \sigma(x,y)\; dA & (2D) \\ \lambda(x)\; dx & (1D) \end{cases}$$

Alternativ enhet for elektrisk felt: $[E] = [V/l] = \mathrm{V/m}$

Potensiell energi mellom punktladninger [FGT 25.1; YF 24.2; AF 21.11; G 2.4.2]

- mellom to punktladninger i innbyrdes avstand r_{12}: $U_{12} = q_1 q_2 / 4\pi\varepsilon_0 r_{12}$
- mellom flere punktladninger: $U = \sum_{i<j} U_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} U_{ij}$ (der faktoren 1/2 hindrer dobbelttelling)

Energibevarelse for ladete partikler i elektrisk felt [FGT 25.1; YF 24.2; AF 21.12; LHL 19.9]

Med *konservative* krefter er *total energi bevart*:

$$
\begin{aligned}
T + U &= \text{konstant} \\
T &= \frac{1}{2}mv^2 = \text{kinetisk energi} \\
U &= qV = \text{potensiell energi}
\end{aligned}
$$

Dersom partikkel med ladning q og masse m akselereres i elektrisk felt $\boldsymbol{E}$, dvs gjennom potensialforskjell $\Delta V = V_2 - V_1$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv_1^2 + qV_1 &= \frac{1}{2}mv_2^2 + qV_2 \\
\Rightarrow v_2^2 &= v_1^2 + \frac{2q}{m}(V_1 - V_2) \\
\Rightarrow v_2 &= \sqrt{v_1^2 - \frac{2q\Delta V}{m}} = v_1\sqrt{1 - \frac{2q\Delta V}{mv_1^2}}
\end{aligned}
$$

Her er v_1 partikkelens hastighet der potensialet er V_1 ("startpunkt") og v_2 er partikkelens hastighet der potensialet er V_2 ("sluttpunkt").
Dersom $q\Delta V < 0$ fås $v_2 > v_1$, dvs (positiv) akselerasjon.
Altså:
Negativ ladning akselereres i retning høyere potensial
Positiv ladning akselereres i retning lavere potensial
.... mens begge typer ladning selvsagt akselereres i retning lavere potensiell energi.

Bevegelsen til en partikkel med masse m og ladning q i et elektrisk felt er bestemt av Newtons 2. lov (= *bevegelsesligningen*):

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q\boldsymbol{E}$$

Dermed:

$$\boldsymbol{a} = \frac{q}{m}\boldsymbol{E}$$

Partikkel med positiv ladning akselereres langs $\boldsymbol{E}$.
Partikkel med negativ ladning akselereres langs $-\boldsymbol{E}$.

Ekvipotensialflater [FGT 25.3; YF 24.5; AF 21.11; LHL 19.11; G 2.3.2]

Ekvipotensialflater er flater i rommet med konstant potensial.

$$\Delta V = -\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

for *vilkårlig* integrasjonsvei på en ekvipotensialflate.
Dermed:

$$\boldsymbol{E} \perp \quad \text{ekvipotensialflate}$$

Beregning av $\boldsymbol{E}$ fra V [FGT 25.4; YF 24.6; AF 21.10; LHL 19.9; G 2.3.1, 1.2.2]

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$

Gradientoperatoren ∇:

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} \quad \text{(kartesiske koordinater)} \\ &= \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi} \quad \text{(kulekoordinater)} \end{aligned}$$

(NB: Det er *ikke* meningen at du skal gå rundt og huske på hvordan gradientoperatoren ser ut i kulekoordinater. Den vil bli oppgitt dersom det f.eks. skulle bli bruk for den til eksamen.)
Hvis kulesymmetri (dvs $\boldsymbol{E}$ og V kun avhengig av r, ikke av vinklene θ og ϕ):

$$\boldsymbol{E} = E(r)\hat{r} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r}$$

I **neste uke** skal vi se at:
Vektoren ∇V peker i den retningen der V øker raskest, dvs i den retningen der den *retningsderiverte* til V er størst. Ettersom $\boldsymbol{E} = -\nabla V$, betyr det at det elektriske feltet peker i den retningen der V *avtar* raskest.
Vi skal også se på et eksempel på beregning av V etterfulgt av $\boldsymbol{E}$.
Deretter skal vi gå i gang med elektrisk fluks og Gauss' lov for det elektriske feltet.