Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1303: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2004

Sammendrag, uke 6 (4. og 6. februar)

Betydning av gradientoperatoren

Vektoren ∇V peker i den retningen der V øker raskest, dvs i den retningen der den *retningsderiverte* til V er størst. Ettersom $\boldsymbol{E} = -\nabla V$, betyr det at det elektriske feltet peker i den retningen der V *avtar* raskest.
Eksempel: Dersom en punktladning q plasseres et sted der $\nabla V = 0$, blir den ikke utsatt for noen elektrisk kraft, for da er $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} = -q\nabla V = 0$.

Oppsummering til nå, og møte med Maxwell-ligning nr 1

Coulombs lov (empirisk lov):

$$\boldsymbol{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Elektrisk felt fra punktladning q (følger av definisjonen "kraft pr ladningsenhet"):

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Konservativ kraft:

$$\int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$$

er uavhengig av integrasjonsveien, dvs veien mellom punktene A og B. Dermed:

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

(dvs når vi integrerer rundt en *lukket* kurve)

Med definisjonen av $\boldsymbol{E}$ følger det da at det elektrostatiske feltet også er konservativt, dvs:

$$\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

er uavhengig av integrasjonsveien, og dermed

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

Dette er en av *Maxwells ligninger* (vel å merke, for statiske felt, dvs felt som ikke endrer seg med tiden).
Et konservativt vektorfelt kan alltid avledes fra et skalart *potensial*:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$

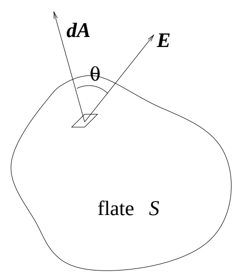
Potensialforskjellen mellom to punkter A og B kan beregnes dersom vi kjenner det elektriske feltet i området mellom A og B:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

Elektrisk fluks [FGT 24.1; YF 23.2; AF 25.3; LHL 19.7; G 2.2.1]

$$\phi = \int_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

Noen ganger skriver vi ϕ_E for å presisere at det er snakk om *elektrisk* fluks. Vi har tidligere definert elektriske feltlinjer slik at den elektriske feltstyrken $E = |\boldsymbol{E}|$ skulle være proporsjonal med tettheten av feltlinjer, eller antall feltlinjer pr flateenhet. Av ovenstående definisjon av elektrisk fluks ϕ kan vi da slutte at ϕ representerer antall feltlinjer som krysser flaten S.
Følgende figur illustrerer hva dette går ut på:



$\boldsymbol{dA} = \hat{n}\, dA$

$\hat{n}$ = enhetsvektor normalt til flaten

dA = flateelement (f.eks. $dx\, dy$)

Flaten S er en vilkårlig "tenkt" eller "valgt" flate i rommet. Det elektriske feltet "eksisterer" i området der flaten S er "plassert". ($\boldsymbol{E}$ kan være null eller forskjellig fra null.) Flaten S tenkes så delt inn i små flateelementer $d\boldsymbol{A} = \hat{n}dA$, med areal dA og orientering i rommet spesifisert ved *flatenormalen* $\hat{n}$. Fluksen $d\phi$ gjennom flaten dA er da lik $\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$. Den totale fluksen gjennom hele flaten S får vi ved å integrere opp bidragene $d\phi$, altså ligningen over.

Merk at fluksen er en *skalar* størrelse. Den kan imidlertid være positiv eller negativ, avhengig av om vinkelen mellom vektorene $\boldsymbol{E}$ og $d\boldsymbol{A}$ er mindre eller større enn 90 grader.

En *lukket flate* S er en flate som omslutter et veldefinert volum V, f.eks. et kuleskall, et peanøttskall e.l. Den elektriske fluksen gjennom en lukket flate skriver vi slik (jfr. notasjonen for veiintegral rundt lukket kurve):

$$\phi_c = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

Indeksen c står for "closed". Den er forsåvidt unødvendig så lenge vi skriver ned integralet. Ringen på integrasjonssymbolet er tilstrekkelig for å understreke at det er snakk om en lukket flate.
Med en lukket flate kan vi gjøre unna "fortegnsproblemet" en gang for alle: Vi velger *positiv* retning på $d\boldsymbol{A}$ *ut av* flaten.

Dermed kan vi konkludere med at

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} > 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{fluks ut gjennom flaten} \\ \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} < 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{fluks inn gjennom flaten} \end{aligned}$$

Dessuten:

$$\begin{aligned} \phi_c > 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{netto fluks ut gjennom flaten} \\ \phi_c < 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{netto fluks inn gjennom flaten} \end{aligned}$$

For en *ikke lukket* flate S har vi ingen tilsvarende mulighet for å velge positiv retning på $d\boldsymbol{A}$. Flaten har to sider, og ingen av disse kan sies å være mer "inne" eller "ute" i forhold til den andre. I enkelte tilfeller velger vi imidlertid en positiv retning på (den lukkede!) kurven (linjen) som går rundt kanten av S. Da definerer vi positiv retning på $d\boldsymbol{A}$ ved hjelp av *høyrehåndsregelen*: La høyrehåndas fire øvrige fingre peke i positiv retning for flatens omsluttende kurve. Da peker tommelen i positiv retning for $d\boldsymbol{A}$.

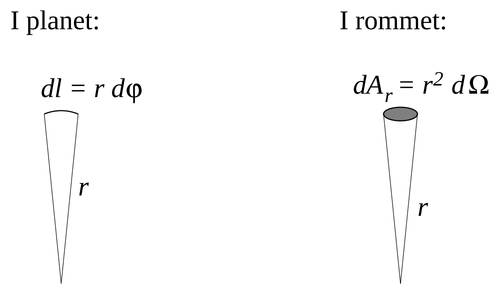
Gauss' lov [FGT 24.2; YF 23.4; AF 25.4; LHL 19.7; G 2.2.1]

Gauss' lov (på isåkalt integralform; senere i kurset, hvis vi får tid, skal vi se at vi også har en versjon av Gauss' lov på såkalt differensialform):

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = \frac{q_{\text{in}}}{\varepsilon_0}$$

Her er integralet på venstre side av ligningen et *flateintegral* over en *lukket* flate S, mens q_{in} er total (netto) ladning innenfor den lukkede flaten ("gaussflaten").
Gauss' lov er en av *Maxwells ligninger*. (Vi konsentrerer oss fremdeles om *elektrostatikk* en god stund framover, men faktisk er det slik at Gauss' lov også gjelder selv om $\boldsymbol{E}$ skulle finne på å variere med tiden.)
Innholdet i ligningen kan formuleres slik: Netto antall feltlinjer ut av et volum, dvs ut gjennom den lukkede flaten som avgrenser dette volumet, er bestemt av, og direkte proporsjonal med netto ladning inne i volumet, dvs innenfor den lukkede flaten.
Gauss' lov følger direkte av Coulombs lov, og representerer således ingen ny fysikk.

I forbindelse med beviset for Gauss' lov fikk vi bruk for det vi kalte en *romvinkel* Ω. På samme måte som en liten sektor i et plan utspenner en *vinkel* $d\phi$ vil en liten kjegle i rommet utspenne en *romvinkel* $d\Omega$. Videre: På samme måte som at buelengden dl i avstand r fra "sentrum" da blir $dl = r\, d\phi$ blir arealet dA_r av flaten som står normalt på $\boldsymbol{r}$ og som avgrenses av den lille kjeglen da lik $dA_r = r^2\, d\Omega$.



Lar vi sektoren i planet utspenne en hel omdreining, tilsvarer det en vinkel

$$\oint d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

Tilsvarende: Lar vi kjeglen i rommet utspenne en hel kuleflate, tilsvarer det en romvinkel

$$\oint d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \; d\theta = 4\pi$$

(Her har vi brukt kulekoordinater, der $dA_r = r^2 \sin\theta \;\, d\theta \;\, d\phi$ (se øving 2!), slik at $d\Omega = \sin\theta \; d\theta \; d\phi$.)