Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2005

Løsningsforslag til øving 10

Veiledning torsdag 17. og fredag 18. mars

Oppgave 1

a) Dette systemet kan oppfattes som en seriekobling av tre motstander: de to 30 cm lange Al–ledningene og motstanden $R = 10\ \Omega$. Motstanden til Al–ledningene blir

$$R_A = \frac{l}{\sigma A} = \cdot \frac{0.60\text{m}}{3.54 \cdot 10^7\ \Omega^{-1}\text{m}^{-1} \cdot 10^{-6}\text{m}^2} = 0.017\ \Omega$$

Samme strømstyrke I går gjennom hele systemet. Den er

$$I = \frac{V}{R + R_A} = \frac{1.5\ \text{V}}{10.017\ \Omega} = 0.1497\ \text{A} \simeq 0.15\ \text{A}$$

ifølge Ohms lov. Vi får dermed spenningsfallene

$$V_R = RI = 10\ \Omega \cdot 0.1497\ \text{A} = 1.497\ \text{V}$$

over motstanden R og

$$V_A = R_A I = 0.017\ \Omega \cdot 0.1497\ \text{A} = 0.0025\ \text{V}$$

over de to Al–ledningene tilsammen.

b) Strømstyrken I beregnet vi under punkt *a*). Utviklet effekt i motstanden R blir

$$P = V_R I = 1.497\ \text{V} \cdot 0.1497\ \text{A} = 0.224\ \text{W}$$

($0.225 \simeq 0.23$ W dersom vi neglisjerer motstanden og spenningsfallet over Al–ledningene)

c) Her må vi bestemme tettheten av frie elektroner n. Deretter kan vi bruke $I = j \cdot A = nevA$ til å beregne midlere driftshastighet v.
I Al har vi 2700 kg pr m^3. Dette tilsvarer 2700/0.02698 mol = 100074 mol = 100074 $\cdot 6.02 \cdot 10^{23}$ atomer = $6.02 \cdot 10^{28}$ atomer, og da like mange frie elektroner, med antagelsen ett fritt elektron pr atom Al. Midlere driftshastighet blir

$$v = \frac{I}{neA} = \frac{0.15}{6.02 \cdot 10^{28} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-6}} = 1.56 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s} = 15.6\mu\text{m/s}$$

Midlere termiske hastighet for elektronene anslår vi ved å sette kinetisk energi lik termisk energi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{3}{2}k_B T \\ \Rightarrow v &= \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \simeq 10^5\ \text{m/s} \end{aligned}$$

Her er $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K Boltzmanns konstant. Vi ser at midlere driftshastighet er ca 10 størrelsesordener mindre enn midlere termiske hastighet. Det tar altså flere timer for et gitt elektron å komme seg fra den ene til den andre siden av "systemet" vårt!

Oppgave 2

a) Dersom 700 W tilsvarer 90% av total effekt, blir total effekt 700/0.9 W = 778 W. Denne effekten skal leveres i 0.005 s. Da må en energi $(700/0.9) \cdot 0.005$ J = 3.89 J lagres i kondensatoren.

b) Vi har utledet i forelesningene hvor stort arbeid som skal til for å lade opp en kondensator med kapasitans C. La oss kort rekapitulere: For å øke ladningen på kondensatoren fra q til $q + dq$ fordres arbeidet $dW = v(q)dq$, der $v(q)$ er spenningen over kondensatoren med ladning q. Pr definisjon er $C = q/v$ slik at $dW = C^{-1}q\ dq$ og totalt arbeid $W = Q^2/2C$ for å øke ladningen fra 0 til Q. Med $Q = VC$ kan dette også skrives $W = CV^2/2$. Det betyr at spenningen som skal til for å lagre energien 3.89 J i en kondensator med kapasitans 0.80 mF er

$$V = \sqrt{\frac{2W}{C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3.89}{0.80 \cdot 10^{-3}}} = 98.6 \text{ V}$$

Oppgave 3

Hele lederen kan deles opp i "sylinderrør" med indre radius r, ytre radius $r + dr$, og dermed tverrsnitt med areal

$$dA = 2\pi r\ dr$$

Strømmen i et slik rør er

$$dI = j \cdot dA = j_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot 2\pi r\ dr$$

Total strøm I finner vi ved å integrere dI over lederens tverrsnitt, dvs ved å la r variere fra 0 til R:

$$\begin{aligned} I &= \int dI \\ &= \int_0^R j_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot 2\pi r\ dr \\ &= 2\pi j_0 |_0^R \left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{r^4}{4R^2}\right) \\ &= 2\pi j_0 \left(\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{4}R^2\right) \\ &= \frac{1}{2} j_0 \pi R^2 \end{aligned}$$

Oppgave 4

1. Hele området mellom $r = a$ og $r = b$ kan oppfattes som en seriekobling av motstander dR, der hver motstand er et tynt kuleskall med radius r og tykkelse dr:

$$dR = \frac{\rho\, dr}{4\pi r^2}$$

Hele motstanden finner vi ved å legge sammen enkeltmotstandene, dvs ved å integrere fra $r = a$ til $r = b$:

$$\begin{aligned} R &= \int dR \\ &= \int_a^b \frac{\rho\, dr}{4\pi r^2} \\ &= \frac{\rho}{4\pi}\Big|_a^b \left(-\frac{1}{r}\right) \\ &= \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \end{aligned}$$

2. Det oppgitte uttrykket for strømstyrken I viser at vi her kan bruke Gauss' lov for det elektriske feltet til å bestemme I:

$$I = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Vi må her forutsette at ladningen som kommer inn på den innerste lederen umiddelbart fordeler seg jevnt over kuleflaten ved $r = a$ før den starter sin vandring gjennom materialet mellom $r = a$ og $r = b$.
Potensialforskjellen mellom indre og ytre lederskall bestemmes enkelt ettersom vi kjenner feltet $\boldsymbol{E}$:

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_a - V_b \\ &= -\int_b^a E(r)\, dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\Big|_b^a \frac{1}{r} \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \end{aligned}$$

Av disse uttrykkene følger det at motstanden er

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$