Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2005

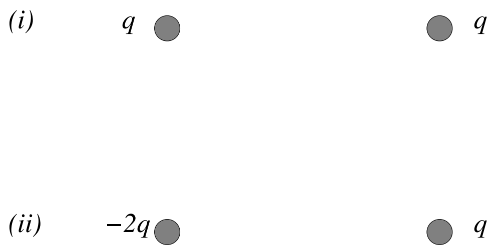
Øving 3

Veiledning: Torsdag 27. januar og fredag 28. januar
Innleveringsfrist: Mandag 31. januar

Oppgave 1

a) I Øving 2 bestemte vi det elektriske feltet fra en uniformt ladet stav og ei uniformt ladet skive. For staven og skiva i Øving 2, prøv å skissere elektriske feltlinjer, både i et plan som inneholder staven (skiva) og i et plan normalt på staven gjennom dens midtpunkt (normalt på skiva gjennom dens sentrum). Vis skissene i stor og liten målestokk i hvert av de fire tilfellene, slik at de gir et kvalitativt bilde av feltet, både nært og langt unna staven (skiva).

b) Skisser elektriske feltlinjer for disse to systemene av punktladninger:



Tips: I denne oppgaven vil det kanskje være til hjelp å gå inn på http://www.falstad.com/vector3de, som er en Java applet for å visualisere (blant annet) elektriske feltlinjer ("Display: Field Lines") fra diverse ladningsfordelinger (punktladninger og kontinuerlige fordelinger). "finite line" representerer nettopp den ladete staven. Det nærmeste vi kommer den sirkulære skiva er "charged plate", som har endelig utstrekning i x-retning. Stavlengden og platestørrelsen kan varieres med det nederste rullefeltet.

Oppgave 2

I kartesiske koordinater er et infinitesimalt (differensielt) linjeelement (veielement) gitt ved (vektoren)

$$d\boldsymbol{l} = dx\ \hat{x} + dy\ \hat{y} + dz\ \hat{z}$$

Et infinitesimalt volumelement er (den skalare størrelsen)

$$dV = dx\ dy\ dz$$

Et infinitesimalt flateelement kan vi uttrykke som en *vektor*: På samme måte som et linjeelement må spesifiseres ved hjelp av en *absoluttverdi* (dvs lengden av elementet) og en *retning*, må et flateelement spesifiseres ved hjelp av en absoluttverdi (dvs arealet av flaten) og en *orientering.* Og skal vi få til å spesifisere flateelementets orientering, er det vel egentlig ganske naturlig å velge den retningen i rommet som står normalt på flaten; den såkalte *flatenormalen.* Det betyr at et flateelement med areal dA som er orientert i rommet på en slik måte at enhetsvektoren $\hat{n}$ (dimensjonsløs og med lengde 1) står vinkelrett på flaten, kan spesifiseres med vektoren

$$dA\ \hat{n}$$

Med andre ord: En vektor med retning vinkelrett på flaten, med absoluttverdi lik flatens areal dA, og med dimensjon lik lengde kvadrert. (Dvs, enhet m^2.)
For lettvinthets skyld bruker vi gjerne notasjonen

$$d\boldsymbol{A} = dA\ \hat{n}$$

for et slik flateelement.
I kartesiske koordinater har vi dermed følgende tre infinitesimale flater, med orientering slik at flatenormalen peker henholdsvis langs x-, y- og z-aksen:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{A}_x &= dy\ dz\ \hat{x} \\ d\boldsymbol{A}_y &= dx\ dz\ \hat{y} \\ d\boldsymbol{A}_z &= dx\ dy\ \hat{z} \end{aligned}$$

a) Vis at i kulekoordinater (r, θ, ϕ) er de tilsvarende størrelser

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{l} &= dr\ \hat{r} + r\ d\theta\ \hat{\theta} + r \sin\theta\ d\phi\ \hat{\phi} \\ d\boldsymbol{A}_r &= r^2 \sin\theta\ d\theta\ d\phi\ \hat{r} \\ d\boldsymbol{A}_\theta &= r\ dr \sin\theta\ d\phi\ \hat{\theta} \\ d\boldsymbol{A}_\phi &= r\ dr\ d\theta\ \hat{\phi} \\ dV &= r^2\ dr \sin\theta\ d\theta\ d\phi \end{aligned}$$

Med andre ord: Flateelementet $d\boldsymbol{A}_r$ er orientert slik at flatenormalen peker radielt utover, dvs langs $\hat{r}$, og tilsvarende for de to andre.

Tips: Det vil være til stor hjelp å tegne opp et infinitesimalt volumelement som avgrenses av flatene r og $r + dr$, θ og $\theta + d\theta$, ϕ og $\phi + d\phi$. Se figur i ukentlig sammendrag, uke 3. Legg merke til at enhetsvektorene $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ og $\hat{\phi}$ *ikke* er faste vektorer i rommet (i motsetning til de kartesiske enhetsvektorene $\hat{x}$, $\hat{y}$ og $\hat{z}$), de er avhengige av *hvor* i rommet vi er, og *endrer retning* ettersom vi flytter oss rundt omkring. Eksempler: I et punkt på y-aksen (med $y > 0$) er $\hat{r} = \hat{y}$ mens i et punkt på z-aksen ($z > 0$), derimot, er $\hat{r} = \hat{z}$. I hele xy-planet er $\hat{\theta} = -\hat{z}$, mens $\hat{\phi} = -\hat{x}$ på positiv y-akse og $\hat{\phi} = \hat{x}$ på negativ y-akse.

b) Vis på grunnlag av formlene over at ei kule med radius R har volum $4\pi R^3/3$ og overflateareal $4\pi R^2$.

Kommentar: Omkretsen av en sirkel med radius R er $2\pi R$. Sirkelen *utspenner en vinkel* på 2π (radianer). Disse resultatene kommer vi fram til ved å starte med et infinitesimalt bueelement $dl = R\ d\theta$ og integrere fra 0 til 2π. Tilsvarende har en kuleflate med radius R et areal $4\pi R^2$. Kuleflaten *utspenner en romvinkel* på 4π (såkalte steradianer). Legg merke til analogien mellom vinkel i planet og romvinkel i rommet! I sistnevnte tilfelle er utgangspunktet et infinitesimalt *flateelement* $dA_R = R^2\ d\Omega$, der $d\Omega = \sin\theta\ d\theta\ d\phi$ er et infinitesimalt *romvinkelelement*. Integrasjon over θ (fra retning "nord", dvs langs positiv z, dvs $\theta = 0$, til retning "sør", dvs langs negativ z, dvs $\theta = \pi$) og ϕ (fra retning langs positiv x, dvs $\phi = 0$, og en hel runde rundt, dvs til $\phi = 2\pi$) gir deretter hele kuleflatens totale areal A, evt. den totale romvinkelen $\Omega = 4\pi$. Vi kommer snart tilbake til dette i forelesningene, i forbindelse med *Gauss lov*.

c) Anta nå at vi har ei kule med radius R. Inni kula har vi elektrisk ladning gitt ved ladningstettheten (dvs ladning pr volumenhet)

$$\rho(r,\theta) = \rho_0 \frac{r}{R} \cos^2\theta$$

Hvor har vi størst ladningstetthet? Enn minst? Bestem kulas totale ladning Q.