Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2005

Løsningsforslag til øving 5

Veiledning torsdag 10. februar og fredag 11. februar

Oppgave 1

a) Her har vi oppgitt $V(r,\theta)$ og gradientoperatoren i kulekoordinater, så det er bare å regne i vei (ingenting avhenger her av vinkelen ϕ, så leddet som inneholder $\partial/\partial\phi$ trenger vi ikke å bry oss med):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(r,\theta) &= -\nabla V(r,\theta) \\
&= -\left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\
&= \hat{r}\frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3} + \hat{\theta}\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}
\end{aligned}$$

Vi merker oss at feltet fra en elektrisk dipol i stor avstand r fra dipolen faller av som $1/r^3$, altså raskere enn feltet fra en elektrisk "monopol", dvs en punktladning, som faller av som $1/r^2$. Feltbidragene fra de to ladningene med motsatt fortegn kansellerer hverandre delvis, men ikke fullstendig, ettersom retningen på de to bidragene til $\boldsymbol{E}$ alltid vil være litt forskjellig.

Hvis $\theta = 0$, får vi

$$E_r = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

og

$$E_\theta = 0$$

Dette virker rimelig: Vi er nå i et punkt langt ute på z-aksen, slik at radiell retning blir nettopp langs z-aksen, mens θ-retningen blir langs x-aksen. Og på z-aksen må vel det elektriske feltet åpenbart ha retning langs z-aksen.
Hvis $\theta = \pi/2$, får vi

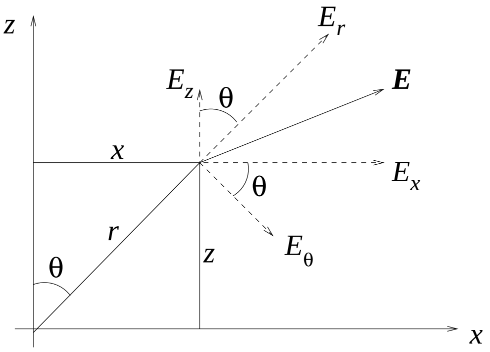
$$E_r = 0$$

og

$$E_\theta = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Dette virker også rimelig: Vi er nå i et punkt langt ute på x-aksen, slik at radiell retning blir nettopp langs x-aksen, mens θ-retningen blir langs negativ z-akse. Og på x-aksen må vel det elektriske feltet åpenbart ha retning langs negativ z-akse.
Setter vi inn $r = 0$ i uttrykkene for E_r og E_θ, ser vi at begge to går mot uendelig. Det er imidlertid ikke et reelt problem fordi vi nå forsøker å bruke uttrykket for E utenfor gyldighetsområdet $r \gg a$. Feltet i origo er langt fra uendelig, og heller ikke vanskelig å regne ut. Det klarer du helt sikkert selv!

b) Av figuren nedenfor skulle det gå relativt klart fram hvordan den elektriske feltvektoren $\boldsymbol{E}$ enten kan dekomponeres i E_r og E_θ eller i E_x og E_z.



Både E_r og E_θ har komponenter i x-retning, og den totale x-komponenten av feltet må bli summen av disse to. Figurbetraktning gir:

$$\begin{aligned}
E_x &= E_r \sin\theta + E_\theta \cos\theta \\
&= \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\sin\theta + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\cos\theta \\
&= \frac{3p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sin\theta\cos\theta \\
&= \frac{3pxz}{4\pi\varepsilon_0 r^5} \\
&= \frac{3pxz}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}
\end{aligned}$$

Her har vi brukt $\sin\theta = x/r$, $\cos\theta = z/r$ og $r = (x^2+z^2)^{1/2}$.
Helt tilsvarende finner vi z-komponenten:

$$\begin{aligned}
E_z &= E_r \cos\theta - E_\theta \sin\theta \\
&= \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\cos\theta - \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\sin\theta \\
&= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \\
&= \frac{\left(2z^2 - x^2\right)p}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}
\end{aligned}$$

c) I kartesiske koordinater blir potensialet

$$V = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p(z/r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{pz}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}$$

Med $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ får vi dermed

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{3pzx}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}$$

$$
\begin{aligned}
E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-p}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}} + \frac{3pz^2}{\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-p\left(x^2+z^2\right)+3pz^2}{\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}\right) \\
&= \frac{\left(2z^2-x^2\right)p}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}
\end{aligned}
$$

Det samme som vi fant under punkt *b*)!

Oppgave 2

Denne oppgaven dreier seg om å bruke Gauss' lov,

$$\phi = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = Q/\varepsilon_0.$$

Det første vi kan merke oss er at $\boldsymbol{E} = E_x\hat{x}$ i de tre første tilfellene har retning langs x-aksen. Det betyr at det da ikke går noe fluks gjennom de av kubens flater som har flatenormal i y- eller z-retning, bare gjennom de to flatene med flatenormal i x-retning. I tilfelle *d*) må vi også ta med flatene med flatenormal i y-retning.

a) Her er $E_x = C$, dvs konstant. Da må vi ha like stor elektrisk fluks inn gjennom flaten ved $x = 0$ som vi har ut gjennom flaten ved $x = a$:

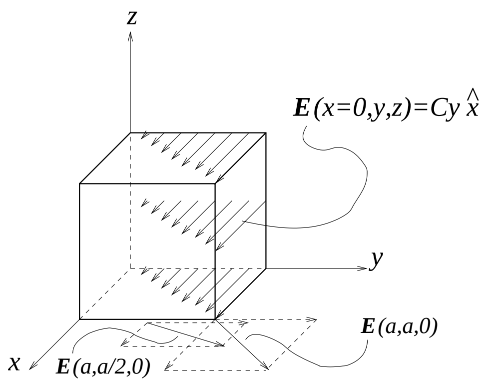
$$\phi_{\text{inn}} = \phi_{\text{ut}} = E_x A = Ca^2$$

der $A = a^2$ er arealet av en sideflate. Dermed blir netto fluks $\phi = 0$ gjennom kubens overflate, og ifølge Gauss' lov også netto ladning inne i kuben $Q = 0$.

b) Her er $E_x = Cx$. På de to sideflatene ved $x = 0$ og $x = a$ er da feltstyrken henholdsvis $E_x(0) = 0$ og $E_x(a) = Ca$. Dermed blir det null fluks gjennom flaten ved $x = 0$, mens fluksen ut ved $x = a$ blir $\phi_{\text{ut}}(x = a) = Ca \cdot a^2 = Ca^3$. Dette blir da også netto fluks gjennom S, $\phi = Ca^3$. Gauss' lov gir netto ladning $Q = C\varepsilon_0 a^3$ inne i kuben.

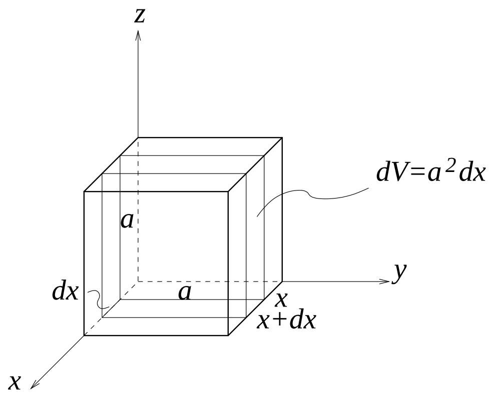
c) Her er $E_x = Cx^2$. Igjen er $E_x(0) = 0$, mens $E_x(a) = Ca^2$. Nok en gang får vi null fluks gjennom flaten ved $x = 0$, mens fluks ut ved $x = a$ blir $\phi_{\text{ut}}(x = a) = Ca^2 \cdot a^2 = Ca^4$, som også her blir netto fluks gjennom S. Med Gauss' lov: $Q = C\varepsilon_0 a^4$ for netto ladning i kuben.

d) Nå er $E_x = Cy$ og $E_y = Cx$, og vi får fluks gjennom i alt fire av de seks sideflatene. Figuren illustrerer feltet på planet $x = 0$. I tillegg har vi tatt med et par eksempler på planet $x = a$, hvor y-komponenten av feltet er konstant og lik Ca, mens x-komponenten vokser lineært med y.



Det hele kan kanskje se litt komplisert ut, men forenkler seg drastisk ved nærmere ettertanke: Vi ser nemlig at E_x ikke avhenger av x og tilsvarende at E_y ikke avhenger av y. Det betyr at fluksen inn gjennom flaten ved $x = 0$ må være like stor som fluksen ut gjennom flaten ved $x = a$. På samme vis: Like stor fluks inn gjennom flaten ved $y = 0$ som ut ved $y = a$. Konklusjon: Null netto fluks gjennom hele den lukkede flaten, og null netto ladning innenfor flaten, ifølge Gauss' lov.

e) Vi skal for tilfellet *c*), dvs med $\boldsymbol{E} = Cx^2\hat{x}$, bestemme ladningstettheten ρ inne i kuben.
Vi følger henvisningene i oppgaveteksten og starter med å se på et lite volumelement $dV = a^2\,dx$, dvs en tynn skive beliggende mellom x og $x + dx$:



For å finne netto fluks ut gjennom overflaten til denne tynne skiva, må vi bestemme fluksen *inn* ved x og fluksen *ut* ved $x + dx$. Det elektriske feltet på disse to flatene er:

$$\begin{aligned}
E(x) &= Cx^2 \\
E(x+dx) &= C\,(x+dx)^2 \\
&= Cx^2 + 2Cx\,dx + C(dx)^2 \\
&\simeq Cx^2 + 2Cx\,dx
\end{aligned}$$

Legg merke til tilnærmelsen vi gjør her: Vi neglisjerer $C(dx)^2$ i forhold til $2Cx\,dx$. Det kan vi trygt gjøre ettersom dx er en infinitesimal tykkelse, dvs vi er interessert i grensen $dx \to 0$. Fluksen gjennom de to flatene får vi ved å multiplisere feltstyrken med arealet, dvs a^2. Dermed blir netto fluks ut gjennom den lille (infinitesimale) gaussflaten

$$d\phi = E(x+dx)a^2 - E(x)a^2 = 2Ca^2x\,dx$$

Ifølge Gauss' lov skal dette være lik ladningen inne i den tynne skiva dividert med ε_0. Ladningen inne i skiva kan vi skrive som *ladningstettheten* ρ multiplisert med volumet:

$$dq = \rho\, dV = \rho a^2\, dx$$

Dermed:

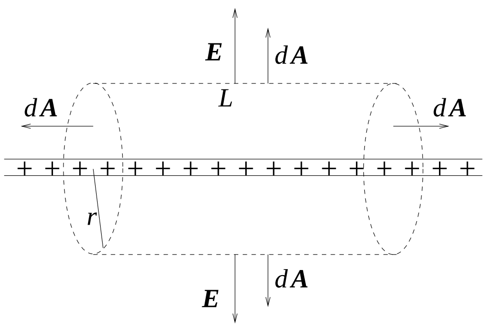
$$\begin{aligned} 2Ca^2x\, dx &= \frac{\rho a^2\, dx}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow \rho &= 2C\varepsilon_0 x \end{aligned}$$

Kommentarer:

- Merk at vi her har brukt Gauss' lov med en gaussflate som omslutter et differensielt volumelement. Det er helt i orden; vi velger selv hva som er en fornuftig gaussflate - stor eller liten. Men *lukket* må den være!
- I punkt c) bestemte du total ladning Q inne i kuben. Nå har du bestemt ladningstettheten ρ. Kontroller at de to svarene er konsistente!

Oppgave 3

En uendelig lang, jevnt ladet stav må resultere i et elektrisk felt som for det første er radielt rettet bort fra staven (evt inn mot staven, hvis den var negativt ladet), og for det andre kun avhengig av avstanden r fra staven. Med litt ettertanke innser vi da at det er lurt å velge en sylinder som gaussflate, slik at den ladete staven går langs sylinderens akse:



På sylinderflaten er da "flateelementvektoren" $d\boldsymbol{A}$ enten normal til $\boldsymbol{E}$ (på de to endeflatene) eller parallell med $\boldsymbol{E}$ (på resten av overflaten). Der $d\boldsymbol{A}$ er parallell med $\boldsymbol{E}$, dvs der vi får et bidrag til flateintegralet i Gauss' lov, har $E(r)$ overalt samme verdi og kan trekkes utenfor integralet. På de to endeflatene er $\boldsymbol{E}$ parallell med flaten (normal til flatenormalen!), så ingen elektrisk fluks går gjennom disse. Med en omkrets på $2\pi r$ og en lengde L blir arealet av sylinderoverflaten $2\pi rL$. Hvor mye ladning befinner seg innenfor denne gaussflaten? Med ladning λ pr lengdeenhet og lengde L må den bli $Q = \lambda L$.
Gauss' lov gir da:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = E(r) \cdot 2\pi rL = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

slik at det elektriske feltet blir

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Dette er nettopp hva vi fant i oppgave 2 *d*) i øving 2.

Oppgave 4

a) **C**. Det følger av Gauss' lov at flaten da omslutter en netto negativ ladning. På den lukkede flaten er flateelementvektoren $d\boldsymbol{A}$ definert positiv med retning *ut av* flaten. Med $\boldsymbol{E}$ overalt rettet innover blir da alle bidrag $d\phi = \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$ til fluksen gjennom den lukkede flaten negative. Den totale fluksen gjennom flaten er lik omsluttet ladning (delt på konstanten ε_0), som da også må være negativ.

b) **A**. Netto elektrisk fluks ut gjennom flaten skal ifølge Gauss' lov være lik netto omsluttet ladning delt på konstanten ε_0. Her er netto omsluttet ladning $q - q = 0$.

c) **B**. Her er netto omsluttet ladning $-2q + q = -q$.

d) **B**. Potensialet fra en punktladning er $V(r) = q/4\pi\varepsilon_0 r$ når $V(r \to \infty)$ er satt til null. Med $V = 50$ V finner vi

$$r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 V} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-8}}{50} = 1.8 \text{ m}$$

Med SI-enheter for alle størrelser som inngår er vi garantert at svaret også kommer ut i SI-enhet, dvs m.

e) **D**. Det elektriske feltet er den negative gradienten til potensialet, $\boldsymbol{E} = -\nabla V$. Her har vi oppgitt at potensialet er konstant lik 100 V, og gradienten til en konstant er lik null.

f) **C** Ifølge Gauss' lov er netto elektrisk fluks ut gjennom en lukket flate bestemt av netto ladning innenfor flaten. Her er netto ladning innenfor de tre flatene like stor, $Q_{\text{in}} = \pi R^2 \sigma$, og derfor er netto fluks ut gjennom flatene også like stor.

g) **D**

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr}\hat{r} \quad \Rightarrow \quad \text{graf 5}$$

h) **D**

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dx}\hat{x} = -15\frac{\text{V}}{\text{m}}\hat{x}$$

i) **A**

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -2\frac{\text{V}}{\text{m}}$$

j) **D** Ifølge Gauss' lov er total elektrisk fluks gjennom en lukket flate som omslutter en punktladning q lik

$$\phi_{\text{tot}} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Av symmetrigrunner må det passere en like stor andel av denne fluksen ut gjennom overflaten av den inntegnede kuben som ut gjennom de "resterende" 7 kubene som skal til for å lage en kube med q i sentrum. (8 oktanter i et 3-dimensjonalt koordinatsystem!) Hver av disse 8 kubene har 3 "hosliggende" sideflater der $\boldsymbol{E}$ er parallell med flaten (dvs $\boldsymbol{E}$ normalt på flatenormalen). Altså går det ingen fluks gjennom disse. Videre har hver av de 8 kubene 3 likeverdige "motstående" sideflater, og den skraverte flaten er en av disse. Uten å regne kan vi fastslå at det må gå like stor fluks gjennom hver av disse 3. Den "store kuben" med q i sentrum har da i alt 24 slike likeverdige sideflater, og fluks gjennom hver av dem må bli

$$\phi = \frac{\phi_{\mathrm{tot}}}{24} = \frac{q}{24\varepsilon_0}$$