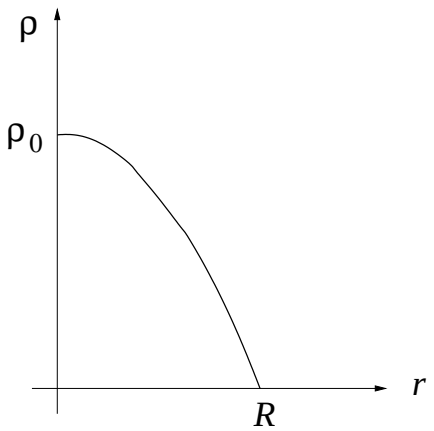
Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2005

Løsningsforslag til øving 7

Veiledning torsdag 23. februar og fredag 24. februar

Oppgave 1

a) Skisse av ladningstettheten $\rho(r)$:



Et lite volumelement dV i posisjon $\boldsymbol{r}$ inneholder en ladning $dq = \rho(\boldsymbol{r})\,dV$. Her har vi kulesymmetrisk ladningsfordeling, så vi kan bruke et tynt kuleskall med radius r og tykkelse dr som volumelement: $dV = 4\pi r^2\,dr$. Kulas totale ladning får vi ved å summere opp ladningen i slike kuleskall, dvs vi må integrere fra $r = 0$ til $r = R$:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{r<R} \rho\,dV \\ &= 4\pi\rho_0 \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r^2\,dr \\ &= 4\pi\rho_0 |_0^R \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2}\right) \\ &= 4\pi\rho_0 R^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{8\pi\rho_0 R^3}{15} \end{aligned}$$

b) Med kulesymmetrisk ladningsfordeling velger vi kuleflate med radius r som gaussflate. Integralet i Gauss' lov blir da

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

Dersom $r > R$, er hele ladningen $Q = 8\pi\rho_0 R^3/15$ innenfor gaussflaten. Da blir det elektriske feltet

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{2\rho_0 R^3}{15\varepsilon_0 r^2}$$

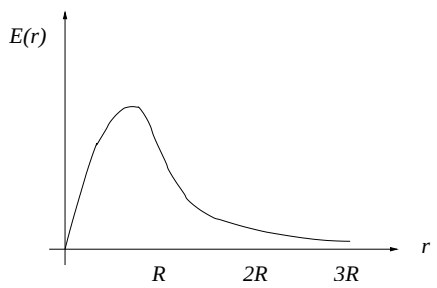
Dersom $r < R$, er ladningen innenfor gaussflaten lik

$$\begin{aligned} q_{\text{in}}(r) &= \int_{r'<r} \rho(r')\, dV \\ &= 4\pi\rho_0 \int_0^r \left(1 - \frac{r'^2}{R^2}\right) r'^2\, dr' \\ &= 4\pi\rho_0 |_0^r \left(\frac{r'^3}{3} - \frac{r'^5}{5R^2}\right) \\ &= 4\pi\rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2}\right) \end{aligned}$$

slik at det elektriske feltet blir

$$E(r) = \frac{q_{\text{in}}(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5R^2}\right)$$

Skisse av $E(r)$:



Oppgave 2

Her utgjør de to kulene og metalltråden i mellom en sammenhengende elektrisk leder. Det betyr at vi har samme verdi på det elektriske potensialet på de to kulene. Siden kulene er langt fra hverandre, har vi kulesymmetrisk ladningsfordeling på overflaten av hver av kulene. Hvis kule 1 har ladning Q_1, blir potensialet på denne kula $V_1 = Q_1/4\pi\varepsilon_0 R_1$. La oss vise det: Vi vet at det elektriske feltet utenfor kula er det samme som om hele ladningen Q_1 var lokalisert i kulas sentrum, dvs $E_1(r) = Q_1/4\pi\varepsilon_0 r^2$, rettet radielt utover (dersom $Q_1 > 0$). Med valget $V_1 = 0$ uendelig langt borte kan vi bestemme potensialet på kula ved å integrere det elektriske feltet:

$$V_1(R_1) = -\int_\infty^{R_1} E_1(r)\, dr = -\int_\infty^{R_1} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

Og med ladning Q_2 på den andre kula blir potensialet der

$$V_2(R_2) = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

Likhet mellom disse to potensialverdiene resulterer i

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Samtidig må vi selvsagt ha $Q_1 + Q_2 = Q$, slik at

$$Q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} Q \quad , \quad Q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} Q$$

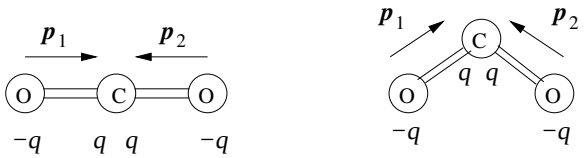
Den elektriske feltstyrken på overflaten av kule j ($j = 1, 2$) er

$$E_j(R_j) = \frac{\sigma_j}{\varepsilon_0} = \frac{Q_j}{4\pi\varepsilon_0 R_j^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_j (R_1 + R_2)}$$

Altså: Mest ladning på kula med størst radius. Størst elektrisk feltstyrke på kula med minst radius.

Oppgave 3

Vi må forvente at CO_2 er lineært når det elektriske dipolmomentet er null. Selv om vi ikke vet om det er karbonatomet eller oksygenatomene som "trekker" sterkest på de elektronene som danner bindingene, må vi i hvert fall anta at det er en viss forskjell, slik at det enten er et lite overskudd av negativ ladning i nærheten av oksygenatomene, og dermed et lite underskudd i nærheten av karbonatomet, eller omvendt. I virkeligheten er det første riktig, slik at hvis vi "tilordner" en ladning $-q$ til hver O, må vi tilordne en ladning $+2q$ til C (ettersom hele molekylet er elektrisk nøytralt). Da kan vi tenke oss at molekylets totale dipolmoment er lik (vektor-)summen av to dipolmoment assosiert med to ladningspar q og $-q$:



Vi ser at med lineær struktur blir $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = 0$, mens med bøyd struktur blir $\boldsymbol{p} \neq 0$.

Vi kan resonnere på lignende vis når det gjelder strukturen til NH_3 og BF_3. For det første: Av symmetrigrunner må alle bindingslengder N-H være like store, og tilsvarende for B-F. Dessuten må alle bindingsvinkler H-N-H være like store, og tilsvarende for F-B-F. Da har vi kun to muligheter: Enten er molekylet plant eller så er det pyramideformet, med de 3 like atomene i grunnplanet og det siste på toppen. Også i disse to molekylene må vi forvente litt ulik grad av *elektronegativitet* dvs "evne til å tiltrekke seg ekstra elektroner". I BF_3 blir F litt negativt ($-q$) og B litt positivt ($+3q$), i NH_3 blir H litt positivt ($+q$) mens N blir litt negativt ($-3q$). Vi får i hvert molekyl et totalt dipolmoment lik vektorsummen av tre dipolmoment assosiert med tre ladningspar q og $-q$. Hvis molekylet er plant, blir summen av disse tre lik null, hvis molekylet er pyramidalt, blir summen ikke lik null. Konklusjonen må bli at BF_3 er et plant molekyl og at NH_3 har pyramidal struktur. Og slik er det da også i virkeligheten! Eksperimenter viser at vinklene F-B-F alle er 120 grader, mens vinklene H-N-H er ca 107 grader.

Oppgave 4

a) I forelesningene har vi utledet at kapasitansen til en parallellplatekondensator er lik

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

der A er platearealet og d er avstanden mellom platene. Med tallverdier innsatt får vi

$$C_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{0.5^2}{0.01} = 2.21 \cdot 10^{-10}$$

I SI-systemet har kapasitansen enheten F (farad). Med "prefikset" p for "piko", som betyr 10^{-12}, kan vi dermed skrive $C_0 = 221$ pF.

b) Vi vet at vi får (tilnærmet) uniformt elektrisk felt mellom to (tilnærmet uendelig) store parallelle plater med uniformt fordelt ladning med motsatt fortegn. Følgelig (med V = potensialforskjellen mellom platene):

$$E = \frac{V}{d} = \frac{96}{0.01} = 9600 \text{ V/m}$$

Ettersom kapasitansen pr definisjon er lik forholdet mellom ladningen Q og potensialforskjellen V, har vi

$$Q = C_0 V = 2.21 \cdot 10^{-10} \cdot 96 = 2.12 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

Eller, med prefikset n for "nano", dvs 10^{-9}, $Q = 21.2$ nC.

c) I forelesningene har vi vist at dersom rommet mellom platene fylles med et dielektrikum med relativ permittivitet (dielektrisitetskonstant) ε_r, øker kapasitansen med en faktor ε_r i forhold til om rommet var fylt med luft ($\simeq$ vakuum). Her endrer ikke plateladningen Q seg, slik at hvis kapasitansen øker med faktoren ε_r, må potensialforskjellen minke med en tilsvarende faktor. Følgelig er

$$\varepsilon_r = \frac{96}{1.2} = 80$$

Den elektriske susceptibiliteten χ_e er lik $\varepsilon_r - 1$, slik at $\chi_e = 79$ for vann. Mediets (her: vannets) permittivitet er gitt ved $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ så for vann har vi $\varepsilon = 80 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} = 7.08 \cdot 10^{-10}$. Fra formen på Coulombs lov hadde vi at en mulig enhet for elektrisk permittivitet er C^2/Nm^2. Ettersom kapasitansen har enheten F, blir en alternativ SI-enhet for permittivitet F/m. Både relativ permittivitet og elektrisk susceptibilitet er dimensjonsløse størrelser.

d) Den elektriske susceptibiliteten χ_e var definert ved den antatt lineære sammenhengen mellom polariseringen $\boldsymbol{P}$ og det elektriske feltet $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E}$$

Dermed:

$$P = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{1}{\varepsilon_r}E_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{79}{80} \cdot 9600 \simeq 8.39 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

Maksimal teoretisk polarisering i vann er:

$$P_{\max} = \frac{N_A \cdot p_{\text{vann}}}{v_m} = \frac{6.02 \cdot 10^{23} \cdot 6.2 \cdot 10^{-30}}{18 \cdot 10^{-6}} \simeq 0.21 \text{ C/m}^2$$

Her er $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$ det såkalte Avogadros tall, dvs antall molekyler i ett mol og $v_m = 18 \cdot 10^{-6}$ m^3 det molare volumet for vann.

Vi ser at polariseringen P bare utgjør en ganske liten del av maksimal teoretisk polarisering $P_{\max}$, nærmere bestemt

$$P/P_{\max} \simeq 4 \cdot 10^{-7}$$

Det er med andre ord ikke snakk om en "oppmarsjering" av vannmolekyler på rekke og rad, men en liten *tendens* til innordning av elektriske dipoler langs det ytre, påtrykte elektriske feltet.

Oppgave 5

De to smale ringene (se figuren i oppgaveteksten) i innbyrdes avstand $\boldsymbol{d} = 2z\,\hat{z} = 2R\cos\theta\,\hat{z}$ har ladning $\pm dq = \pm\sigma dA = \pm\sigma \cdot (2\pi\rho) \cdot (Rd\theta) = \pm\sigma \cdot (2\pi R\sin\theta) \cdot (Rd\theta)$. Kulas dipolmoment blir dermed:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p} &= \int d\boldsymbol{p} \\
&= \int \boldsymbol{d}\, dq \\
&= \int \boldsymbol{d}\, \sigma\, dA \\
&= \int_0^{\pi/2} 2z\hat{z}\sigma \cdot 2\pi R^2 \sin\theta d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} 2R\cos\theta\hat{z}\sigma \cdot 2\pi R^2 \sin\theta d\theta \\
&= 4\pi R^3\sigma\hat{z} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta \\
&= 4\pi R^3\sigma\hat{z}\,|_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin^2\theta \\
&= 2\pi R^3\sigma\hat{z}
\end{aligned}$$