**Institutt for fysikk, NTNU**
**TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme**
**Vår 2005**

# Sammendrag, uke 7 (16. februar)

**Når er Gauss' lov spesielt nyttig?**
[FGT 23.3; YF 22.4; TM 22.3; AF 25.4; LHL 19.7; DJG 2.2.3]

Gauss' lov kan brukes til å bestemme det elektriske feltet fra en ladningsfordeling der vi har en eller annen form for *symmetri*. Eksempler: Kulesymmetri, plansymmetri, sylindersymmetri.

*Sylindersymmetri:* Se øving 5, uendelig lang stav med uniform ladning $\lambda$ pr lengdeenhet.

*Kulesymmetri:* I forelesningene så vi på en jevnt ladet kuleflate og fant at det elektriske feltet *inni* kula da var lik null, mens det *utenfor* kula var som om hele kuleflatens ladning $Q$ var samlet i kulas sentrum, dvs

$$E(r) = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$$

Når vi har en kulesymmetrisk ladningsfordeling, innser vi at det elektriske feltet må bli radielt rettet, og dessuten at den elektriske feltstyrken $E = |\boldsymbol{E}|$ bare avhenger av avstanden $r$ fra ladningsfordelingens sentrum (og ikke vinklene $\theta$ og $\phi$, dvs hvor vi er på en gitt kuleflate). Vi innser da at det er lurt å velge nettopp en kuleflate med radius $r$ som gaussflate for å bestemme $E(r)$, fordi "flateelementvektoren" $d\boldsymbol{A}$ da er parallell med $\boldsymbol{E}$ på hele gaussflaten. Integralet i Gauss' lov blir da lett å løse:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

Med kulesymmetrisk ladningsfordeling, dvs at ladningen pr volumenhet $\rho$ bare er en funksjon av $r'$ (og ikke $\theta'$ og $\phi'$), blir det også lett å bestemme hvor mye ladning vi har innenfor gaussflaten:

$$\begin{aligned} q_{\text{in}}(r) &= \int_{r'<r} \rho(r') dV' \\ &= \int_{r'=0}^{r} \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \rho(r')(r')^2 \, dr' \sin\theta' \, d\theta' \, d\phi' \\ &= 4\pi \int_{r'=0}^{r} \rho(r') \, (r')^2 \, dr' \end{aligned}$$

Bare ladningstettheten $\rho(r')$ ikke er en altfor "slem" funksjon, klarer vi som regel å løse det siste integralet over $r'$. Vi ser f.eks. at med konstant $\rho$, vil $q_{\text{in}}(r) \sim r^3$, og hvis $\rho(r') \sim r'$ (lineært voksende), vil $q_{\text{in}}(r) \sim r^4$. I førstnevnte tilfelle vil dermed $E(r) \sim r$, i sistnevnte tilfelle vil $E(r) \sim r^2$.
Merk at hvis $r$ er så stor at hele ladningen $Q$ ligger innenfor gaussflaten (dvs: $\rho(r') = 0$ for $r' > r$), vil vi alltid ha $E(r) = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$, dvs som om hele ladningen var samlet i sentrum. Dette resultatet er spesielt for kulesymmetri.

*Plansymmetri:* Et annet viktig eksempel er et jevnt ladet, uendelig stort plan. Vi viste da at dersom planet har ladning $\sigma$ pr flateenhet, blir det elektriske feltet

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

dvs uavhengig av avstanden til planet. I dette tilfellet innser vi for det første at $\boldsymbol{E}$ overalt må stå vinkelrett på det ladete planet, og dessuten at feltstyrken $E = |\boldsymbol{E}|$ i hvert fall ikke kan avhenge av annet enn avstanden til planet. Med det som utgangspunkt innser vi at en lur gaussflate må bli en fyrstikkeske eller sylinder som gjennomskjæres på midten av det ladete planet. Da har vi at flateelementvektoren $d\boldsymbol{A}$ er parallell med $\boldsymbol{E}$ på gaussflatens to endeflater som er parallelle med det ladete planet, mens $d\boldsymbol{A}$ står vinkelrett på $\boldsymbol{E}$ på resten av gaussflaten. Integralet i Gauss' lov reduserte seg dermed til $2EA$, der $A$ er arealet av gaussflatens nevnte endeflater. Ladningen innenfor en slik gaussflate blir $\sigma A$, ettersom et areal $A$ av den ladete flaten nå ligger innenfor gaussflaten. Dermed fant vi at $E$ var konstant, og altså heller ikke avhengig av avstanden til det ladete planet!

Det var deretter ikke vanskelig å bestemme det elektriske feltet fra to parallelle plan med motsatt ladning, $\pm\sigma$ (begge planene fremdeles uendelig store). Bruk av superposisjonsprinsippet gav

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

i området mellom planene, og

$$E = 0$$

i området på utsiden av planene. Mellom planene er feltet rettet fra det positive til det negative planet.
Dette siste eksemplet er meget relevant: Det representerer en såkalt *parallellplatekondensator*, der platenes areal er stort i forhold til avstanden mellom dem. Vi skal komme tilbake til dette eksemplet mange ganger.

### Materialer og elektriske egenskaper

Hovedinndeling av materialer med hensyn på deres elektriske egenskaper:

Ledere: Metaller. Atomenes ytterste elektron(er) er *fri* til å bevege seg gjennom lederen. Eksempler: Cu, Al, Ag etc.

Isolatorer: Alle elektroner er *bundet* til atomene. Eksempler: glass, plast etc.

Halvledere: Er isolator ved $T = 0$ (dvs null temperatur), men enkelte elektroner frigjøres ved $T > 0$. Viktige materialer i elektroniske komponenter (f.eks. dioder, transistorer). Eksempler: Si, Ge, GaAs.

Videre: Superledere, Plasma, Elektrolytter etc.

Kommentar: Metaller er *gode* elektriske ledere. Endel andre materialer (som f.eks. grafitt) er *dårligere* ledere. Senere i kurset, i forbindelse med elektrisk strøm og elektriske kretser, skal vi tallfeste dette ved hjelp av et materiales *elektriske ledningsevne*. Isolatorer som plast, glass og tre har veldig dårlig elektrisk ledningsevne. Den er riktignok ikke eksakt lik null, men mange størrelsesordener mindre enn for både gode og dårlige ledere. Mer om dette senere.

I dette kurset skal vi kun ta for oss ledere og isolatorer. En isolator kalles også for et *dielektrikum*. Vi ser først på elektriske ledere.

**Elektriske ledere**
[FGT 23.4; YF 21.2, 22.5; TM 21.2, 22.5; AF 25.5; LHL 19.2, 19.8; DJG 2.5]

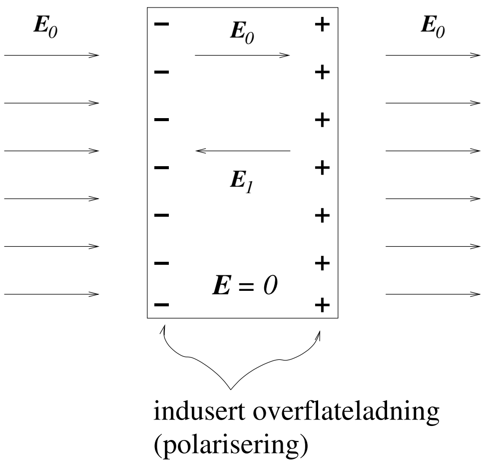
I forelesningene beviste vi følgende 7 viktige resultater hva angår elektrisk felt, potensial og fordeling av netto ladning på en elektrisk leder i *elektrostatisk likevekt*:

1. Inne i lederen er $\boldsymbol{E} = 0$.
2. Det er null netto ladning inne i lederen.
3. All netto ladning fordeler seg på overflaten av lederen.
4. På lederens overflate står det elektriske feltet normalt på overflaten.
5. Hele lederen, både inni og på overflaten, har samme verdi av det elektriske potensialet $V$, dvs lederen er et *ekvipotensial*.
6. På lederens overflate er det elektriske feltet $E = \sigma/\varepsilon_0$, der $\sigma$ er ladning pr flateenhet på lederens overflate.
7. En leder med et (tomt!) hulrom har $E = 0$ inne i hulrommet og all netto ladning på den ytre overflaten. (Dette gjelder selvsagt ikke dersom vi har netto ladning inne i hulrommet, f.eks. en punktladning.)

Kommentar: Vi brukte Gauss' lov til å bevise at all netto ladning må fordele seg på lederens overflate. Vi kunne også ha argumentert for dette resultatet med utgangspunkt i *energien*, nemlig at netto ladning må plassere seg slik at systemets potensielle energi blir minimal. Nå er det vel ikke intuitivt opplagt at lavest energi oppnås med all netto ladning på overflaten? Kanskje vi kunne "tjene" noe på å fordele litt av ladningen utover lederens *volum*? Vel, det er altså *ikke* tilfelle. Enhver elektrisk leder, uansett størrelse og form, vil alltid ha lavest potensiell energi når all netto ladning fordeler seg på overflaten.

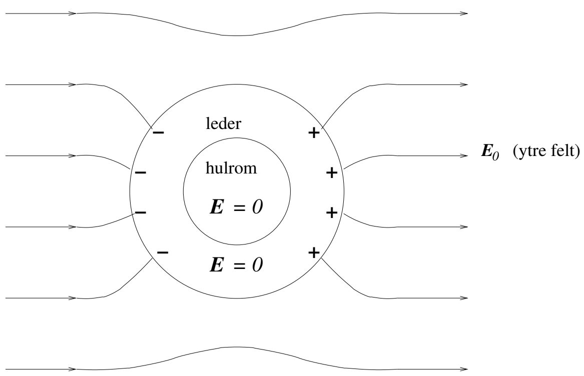
**Leder i ytre felt**

Ytre felt $\boldsymbol{E}_0$ påvirker fri ("mobile") ladninger i lederen med elektrisk kraft. Endel av disse ladningene beveger seg til lederens overflate slik at *indusert felt* $\boldsymbol{E}_1$ akkurat kansellerer ytre ("påtrykt") felt: $\boldsymbol{E}_1 = -\boldsymbol{E}_0$. Dermed blir totalt elektrisk felt $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_1 = 0$ inne i lederen, slik vi har bevist at det må være.




**Leder med hulrom i ytre felt**

Elektrostatisk felt inne i hulrom i leder plassert i ytre felt $\boldsymbol{E}_0$ er lik null:




Dvs: Inne i hulrommet har vi elektrostatisk *skjerming* mot det ytre feltet.
For å være sikker på perfekt skjerming, må vi ha et "ekte" hulrom, dvs et avgrenset volum, som f.eks. inne i en fotball. I praksis får vi veldig god skjerming selv med åpninger inn til hulrommet, jfr Faraday-buret som dere bruker på laben. Andre eksempler er bil og fly.

Merk at den elektriske lederen skjermer et *ytre* felt slik at $E = 0$ inne i (det tomme) hulrommet, mens at det omvendte ikke er tilfelle: Lederen skjermer ikke feltet fra en eventuell ladning inne i hulrommet. Da blir $E \neq 0$ både inne i hulrommet og utenfor lederen, men selvsagt $E = 0$ inne i lederen. (Se øving 6.)