Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2006

Løsningsforslag til øving 10

Veiledning torsdag 16. mars

Oppgave 1

Hele lederen kan deles opp i "sylinderrør" med indre radius r, ytre radius $r + dr$, og dermed tverrsnitt med areal

$$dA = 2\pi r \, dr$$

Strømmen i et slik rør er

$$dI = j \cdot dA = j_0 \, e^{-r/R} \cdot 2\pi r \, dr$$

Total strøm I finner vi ved å integrere dI over lederens tverrsnitt, dvs ved å la r variere fra 0 til R:

$$\begin{aligned} I &= \int dI \\ &= \int_0^R j_0 \, e^{-r/R} \cdot 2\pi r \, dr \\ &= 2\pi j_0 \, R^2 \int_0^1 x \, e^{-x} \, dx \\ &= 2\pi j_0 \, R^2 \left(1 - \frac{2}{e}\right) \end{aligned}$$

Her har vi substituert $x = r/R$ slik at $dr = R \, dx$ og $r = R \, x$. Integralet er oppgitt i oppgaveteksten. Jeg er forøvrig overbevist om at du hadde klart å regne det ut selv, ved hjelp av delvis integrasjon.

Oppgave 2

a) Her er høyre halvdel av kondensatoren en seriekobling av to kondensatorer, begge med plateareal $A/2$, plateavstand $d/2$ og fylt med dielektrika med permittivitet henholdsvis ε_2 (øverst) og ε_3 (nederst). Høyre halvdel har dermed en kapasitans bestemt ved

$$C_h^{-1} = \left(\varepsilon_2 \frac{A/2}{d/2}\right)^{-1} + \left(\varepsilon_3 \frac{A/2}{d/2}\right)^{-1}$$

dvs

$$C_h = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3} \frac{A}{d}$$

Venstre halvdel er rett og slett en kondensator med plateareal $A/2$, plateavstand d og fylt med dielektrikum med permittivitet ε_1. Venstre halvdel har dermed kapasitans

$$C_v = \varepsilon_1 \frac{A/2}{d} = \frac{\varepsilon_1}{2} \frac{A}{d}$$

Hele kondensatoren er en parallellkobling av C_v og C_h, og dermed med kapasitans

$$C = C_v + C_h = \frac{A}{d}\left(\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}\right)$$

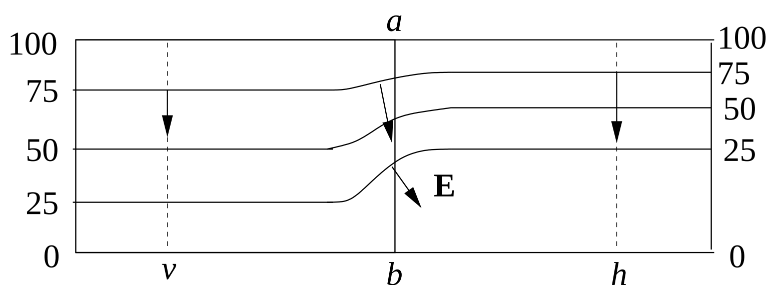
b) Nedre metallplate representerer ekvipotensialet $V = 0$, øvre metallplate representerer ekvipotensialet $V = 100$ V. Dersom hele volumet mellom platene hadde vært fylt med ett og samme dielektrikum (evt vakuum), ville den elektriske feltstyrken ha vært konstant i hele dette volumet, slik at de tre ekvipotensialflatene 25 V, 50 V og 75 V ville ha blitt horisontale plan i avstand henholdsvis $d/4$, $d/2$ og $3d/4$ fra nedre metallplate.
I venstre halvdel må det fortsatt bli slik.
I høyre halvdel er dette ikke lenger tilfellet: Vi har $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0$ og $\varepsilon_3 = 6\varepsilon_0$. Følgelig får vi sterkest polarisering i medium 3, og dermed minst elektrisk feltstyrke her. Vi må uansett ha en potensialforskjell lik 100 V mellom nedre og øvre plate. Det innebærer at

$$\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

må ha verdien 100 V uansett hvilken vei vi velger mellom de to metallplatene. Hvis vi går langs stiplet linje h, har vi

$$E_2\,\frac{d}{2} + E_3\,\frac{d}{2} = \Delta V$$

Fri ladning $\pm Q$ vil ikke fordele seg likt mellom venstre og høyre halvdel. På grunn av polariseringen i høyre halvdel, vil mer enn halvparten av den frie ladningen på metallplatene ligge på høyre halvdel i elektrostatisk likevekt. Men uansett hvor stor denne andelen av fri ladning er, vil elektrisk forskyvning $\boldsymbol{D}$ bli konstant langs hele linjen h. Følgelig blir elektrisk feltstyrke i medium 2 tre ganger større enn i medium 3, ettersom vi har sammenhengen $D = \varepsilon E$. Altså: $E_2 = 3E_3$. I høyre halvdel blir da ekvipotensialflaten 25 V liggende midt i, dvs i grenseflaten mellom medium 2 og medium 3, i avstand $d/2$ fra nedre metallplate. Deretter har vi 50 V i avstand $d/6$ over midten og 75 V i avstand $d/3$ over midten. Hvis alle disse ekvipotensialflatene skal være kontinuerlige, må hele bildet bli seende omtrent slik ut:



Ettersom $\boldsymbol{E}$ må stå normalt på ekvipotensialflatene, kan $\boldsymbol{E}$ ikke ha retning rett nedover i nærheten av midtlinjen ab.