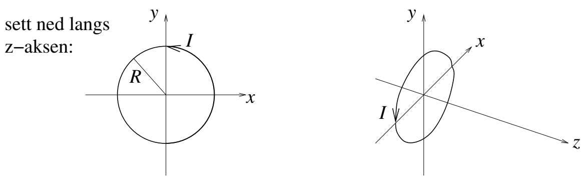
Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2006

Øving 13

Veiledning: Torsdag 6. april
Innleveringsfrist: Onsdag 19. april

Oppgave 1

Ei sirkulær strømsløyfe med radius R fører en elektrisk strøm I. Strømsløyfa ligger i xy-planet med sentrum i origo. Retningen på I er mot klokka hvis vi har positiv z-akse ut av papirplanet. Vi skal i denne oppgaven bestemme det resulterende magnetfeltet $\boldsymbol{B}(0,0,z) = \boldsymbol{B}(z)$ *på symmetriaksen* til strømsløyfa (dvs på z-aksen).



$a)$ Hvorfor er x- og y-komponenten av $\boldsymbol{B}(z)$ lik null? (Tips: Symmetri.)

$b)$ I hvilken retning peker $\boldsymbol{B}(z)$ for positive og negative verdier av z?

$c)$ Bruk Biot–Savarts lov,

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\boldsymbol{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad \left(= \quad \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \quad \right)$$

til å vise at

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

$d)$ Bestem $B(z)$ i stor avstand fra strømsløyfa (dvs: til ledende orden når $z \gg R$) og uttrykk svaret ved hjelp av sløyfas *magnetiske dipolmoment* $m = |\boldsymbol{m}|$.

Magnetisk dipolmoment $\boldsymbol{m}$ for ei plan, lukket strømsløyfe som omslutter et areal A er pr definisjon

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A} = IA\,\hat{n}$$

der $\hat{n}$ er enhetsvektoren normalt til den plane omsluttede flaten. Magnetisk dipolmoment er altså en *vektor* (på samme måte som elektrisk dipolmoment $\boldsymbol{p}$). Positiv retning på $\boldsymbol{m}$ er definert ved hjelp av høyrehåndsregelen: Fire fingre i strømmens retning gir tommelen i samme retning som $\boldsymbol{m}$.

Kommentarer:
Merk at ulike lærebøker bruker litt ulik notasjon her: Noen kaller det “magnetisk dipolmoment”, andre bare “magnetisk moment”. Noen bruker symbolet $\boldsymbol{\mu}$, andre bruker $\boldsymbol{m}$. Uansett, det er samme fysiske størrelse det dreier seg om! Vi velger å bruke symbolet $\boldsymbol{m}$ og kaller det magnetisk dipolmoment, i tråd med f.eks. den norske boka (LHL) og Griffiths. (TM bruker $\boldsymbol{\mu}$, det samme gjør Young og Freedman.)

Det er kanskje også på sin plass å nevne at, i likhet med elektrisk dipolmoment, så har også magnetisk dipolmoment en mer *generell* definisjon enn den vi innførte ovenfor. (Verden består jo tross alt ikke bare av parvise punktladninger med motsatt fortegn og plane strømsløyfer...!) La oss repetere den generelle definisjonen av elektrisk dipolmoment: Har vi en romladningstetthet $\rho(\boldsymbol{r})$, er elektrisk dipolmoment $\boldsymbol{p}$ pr definisjon

$$\boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})\; d^3r$$

Og har vi en strømfordeling gitt ved strømtettheten $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$, er magnetisk dipolmoment $\boldsymbol{m}$ pr definisjon

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\; d^3r$$

Her går integralet over “hele rommet”, dvs der henholdsvis ρ og $\boldsymbol{j}$ er forskjellig fra null. For *spesialtilfellene* som vi (stort sett) ser på i dette kurset, nemlig parvise punktladninger $\pm q$ i innbyrdes avstand beskrevet ved vektoren $\boldsymbol{d}$, og plane strømsløyfer med stasjonær strøm I som omslutter et areal beskrevet ved vektoren (noen ganger kalt “vektorarealet”) $\boldsymbol{A} = A\,\hat{n}$, reduserer disse generelle definisjonene seg nettopp til

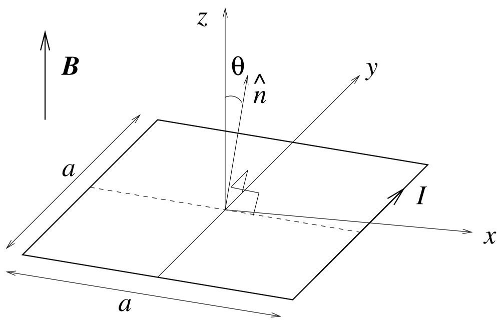
$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

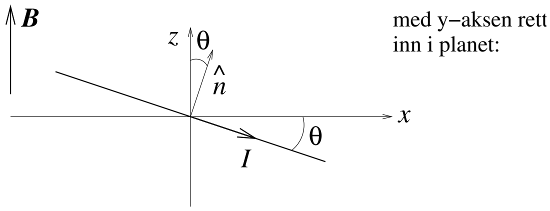
og

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$

Oppgave 2

I forelesningene viste vi at atomer kan oppfattes som små strømsløyfer, dvs som små magnetiske dipoler med magnetisk dipolmoment $\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$ der strømmen I går i en bane som omslutter et (plant) areal A. (“Vektorarealet” er da $\boldsymbol{A} = A\,\hat{n}$, der $\hat{n}$ er en enhetsvektor normalt til den omsluttede flaten, med positiv retning bestemt ved høyrehåndsregelen.)
Her skal vi bruke ei *kvadratisk* strømsløyfe som modell for en slik atomær magnetisk dipol og se nærmere på hvordan den vil oppføre seg i et magnetfelt $\boldsymbol{B}$. (Vi kunne også ha brukt ei *sirkulær* strømsløyfe, men den kvadratiske er litt enklere å regne på.)
Strømsløyfa har sidekanter med lengde a og fører altså en strøm I. Den er plassert i et *homogent* magnetfelt $\boldsymbol{B} = B\,\hat{z}$ og kan rotere fritt omkring y-aksen, som her går gjennom strømsløyfas sentrum som vist i figuren:





Orienteringen av strømsløyfa er definert ved vinkelen θ mellom z-aksen og flatenormalen $\hat{n}$. (Positiv θ *med* klokka, som vist i figuren.)

a) Hva blir strømsløyfas magnetiske dipolmoment $\boldsymbol{m}$? Hva blir den totale kraften fra $\boldsymbol{B}$ på strømsløyfa?

b) Beregn dreiemomentet $\boldsymbol{\tau}$ på sløyfa omkring y-aksen og vis at det kan uttrykkes på formen $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$.
[Tips: Finn kraften på hver av de fire rette lederstykkene og bruk at dreiemoment = "arm ganger kraft".]

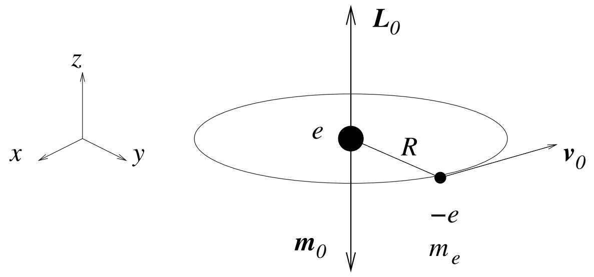
c) Bestem den potensielle energien $U(\theta)$ til en slik magnetisk dipol i feltet $\boldsymbol{B}$. Skisser $U(\theta)$. Hva slags orientering av dipolen i forhold til $\boldsymbol{B}$ representerer henholdsvis en stabil og en ustabil likevekt?

d) I jern har hvert atom et magnetisk dipolmoment $\boldsymbol{m}_{\mathrm{Fe}}$ som dannes av to parallelle elektronspinn, slik at $m_{\mathrm{Fe}} = 2\mu_B$. Her er $\mu_B = e\hbar/2m_e$ det magnetiske dipolmomentet for ett elektronspinn, det såkalte Bohr-magnetonet, med verdi $9.27 \cdot 10^{-24}$ Am^2.
Hva blir da den maksimale tettheten av magnetisk dipolmoment (dvs: magnetisk dipolmoment pr volumenhet) i jern?
[Kommentar: Magnetisk dipolmoment pr volumenhet er, pr definisjon, størrelsen *magnetisering*. I elektrostatikken innførte vi *polarisering*, som pr definisjon er elektrisk dipolmoment pr volumenhet. Mer om magnetisme og magnetisering i forelesningene!]

Oppgitt: Molar masse, jern: 55.9 g/mol. Massetetthet, jern: 7.9 g/cm^3. 1 mol $= 6.02 \cdot 10^{23}$.

Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi med utgangspunkt i en klassisk atommodell se nærmere på hvordan et ytre magnetfelt $\boldsymbol{B}$ vil påvirke elektronets banebevegelse rundt atomkjernen. En slik *diamagnetisk respons* får vi i alle atomer. (Mer om ulike typer magnetisme i forelesningene etterhvert!) Her kan vi for enkelhets skyld ha et hydrogenatom i tankene, med ett elektron med ladning $-e$ i sirkulær bane (i xy-planet) med radius R rundt en kjerne med ladning $+e$.

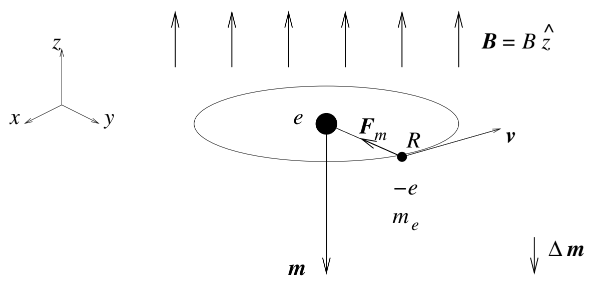


a) Uten et ytre magnetfelt tilstede er elektronets hastighet v_0. Vis at uniform sirkelbevegelse i Coulombfeltet fra atomkjernen da resulterer i en baneradius

$$R = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e v_0^2}$$

Hva blir elektronets banedreieimpuls $\boldsymbol{L}_0$ og magnetiske dipolmoment $\boldsymbol{m}_0$? (Vi ser her bort fra elektronets indre dreieimpuls, dets *spinn*.)

b) Vi skrur nå på et magnetfelt $\boldsymbol{B}$, for enkelhets skyld rettet normalt på elektronets sirkulære bane.



Elektronet påvirkes da, i tillegg til Coulombkraften fra kjernen, av en magnetisk kraft $\boldsymbol{F}_m = -e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ slik at bevegelsesligningen endres. Resultatet blir en endret sammenheng mellom elektronets hastighet v og banens radius R. Anta at magnetfeltet kun endrer hastigheten, og ikke banens radius R, og bestem hastigheten v. Bestem også det magnetiske dipolmomentet $\boldsymbol{m}$ og vis at *endringen*

$$\Delta\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_0$$

alltid vil være *motsatt rettet* $\boldsymbol{B}$, uansett om $\boldsymbol{B}$ peker “opp” eller “ned” i forhold til retningen på elektronets opprinnelige magnetiske dipolmoment $\boldsymbol{m}_0$.

Kommentarer:

1. Vi har tidligere konkludert med at et statisk magnetfelt aldri utfører noe arbeid på en ladning i bevegelse ettersom $\boldsymbol{F}_m \perp \boldsymbol{v}$. Et statisk magnetfelt kan altså ikke endre ladningens hastighet (i absoluttverdi), tilsynelatende i konflikt med det vi har funnet ovenfor. Poenget er imidlertid at vi starter med $B = 0$ og *skrur på* et magnetfelt. Dermed har vi ikke hele tiden et statisk magnetfelt, men et felt som i løpet av en viss tid må endre seg fra null til sin endelige verdi. Som vi skal se i forelesningene, vil et tidsavhengig magnetfelt skape (”indusere”) et elektrisk felt (Faradays induksjonslov), og et elektrisk felt kan som kjent endre hastigheten til et elektron.

2. Fortegnet på den diamagnetiske responsen er et uttrykk for *Lenz' lov*, som kanskje noen har hørt om tidligere, og som vi skal komme tilbake til i forelesningene: Systemets ”respons” er slik at den påtrykte endringen *motvirkes*.

3. Strengt tatt er det nødvendig med en *kvantemekanisk* beskrivelse for å forklare diamagnetisme “skikkelig”. Faktisk er det et *teorem* i statistisk fysikk som sier at for et system av klassiske ladete partikler i termisk likevekt i et ytre magnetfelt er det induserte magnetiske dipolmomentet *eksakt lik null* (Bohr - van Leeuwens teorem). Med andre ord: Diamagnetisme er en ren kvantemekanisk effekt! Likevel gir den enkle klassiske modellen med ett atom et brukbart kvalitativt bilde av effekten.