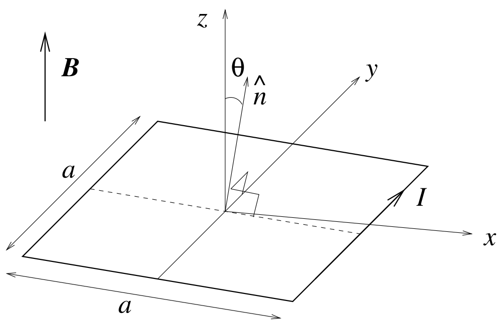
Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2007

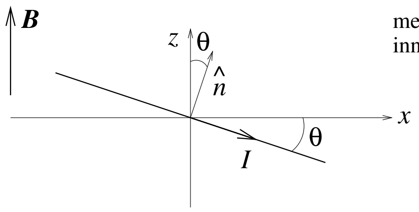
Øving 14

Veiledning: Uke 16
Innleveringsfrist: Mandag 23. april

Oppgave 1

I forelesningene viste vi at atomer kan oppfattes som små strømsløyfer, dvs som små magnetiske dipoler med magnetisk dipolmoment $\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$ der strømmen I går i en bane som omslutter et (plant) areal A. ("Vektorarealet" er da $\boldsymbol{A} = A\,\hat{n}$, der $\hat{n}$ er en enhetsvektor normalt til den omsluttede flaten, med positiv retning bestemt ved høyrehåndsregelen.)
Her skal vi bruke ei *kvadratisk* strømsløyfe som modell for en slik atomær magnetisk dipol og se nærmere på hvordan den vil oppføre seg i et magnetfelt $\boldsymbol{B}$. (Vi kunne også ha brukt ei *sirkulær* strømsløyfe, men den kvadratiske er litt enklere å regne på.)
Strømsløyfa har sidekanter med lengde a og fører altså en strøm I. Den er plassert i et *homogent* magnetfelt $\boldsymbol{B} = B\,\hat{z}$ og kan rotere fritt omkring y-aksen, som her går gjennom strømsløyfas sentrum som vist i figuren:





Orienteringen av strømsløyfa er definert ved vinkelen θ mellom z-aksen og flatenormalen $\hat{n}$. (Positiv θ *med* klokka, som vist i figuren.)

a) Hva blir strømsløyfas magnetiske dipolmoment $\boldsymbol{m}$? Hva blir den totale kraften fra $\boldsymbol{B}$ på strømsløyfa?

b) Beregn dreiemomentet $\boldsymbol{\tau}$ på sløyfa omkring y-aksen og vis at det kan uttrykkes på formen $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$.

[Tips: Finn kraften på hver av de fire rette lederstykkene og bruk at dreiemoment = "arm ganger kraft".]

c) Bestem den potensielle energien $U(\theta)$ til en slik magnetisk dipol i feltet $\boldsymbol{B}$. Skisser $U(\theta)$. Hva slags orientering av dipolen i forhold til $\boldsymbol{B}$ representerer henholdsvis en stabil og en ustabil likevekt?

d) I jern har hvert atom et magnetisk dipolmoment $\boldsymbol{m}_{\mathrm{Fe}}$ som dannes av to parallelle elektronspinn, slik at $m_{\mathrm{Fe}} = 2\mu_B$. Her er $\mu_B = e\hbar/2m_e$ det magnetiske dipolmomentet for ett elektronspinn, det såkalte Bohr-magnetonet, med verdi $9.27 \cdot 10^{-24}$ Am^2.
Hva blir da den maksimale tettheten av magnetisk dipolmoment (dvs: magnetisk dipolmoment pr volumenhet) i jern?
[Kommentar: Magnetisk dipolmoment pr volumenhet er, pr definisjon, størrelsen *magnetisering*. I elektrostatikken innførte vi *polarisering*, som pr definisjon er elektrisk dipolmoment pr volumenhet. Mer om magnetisme og magnetisering i forelesningene!]

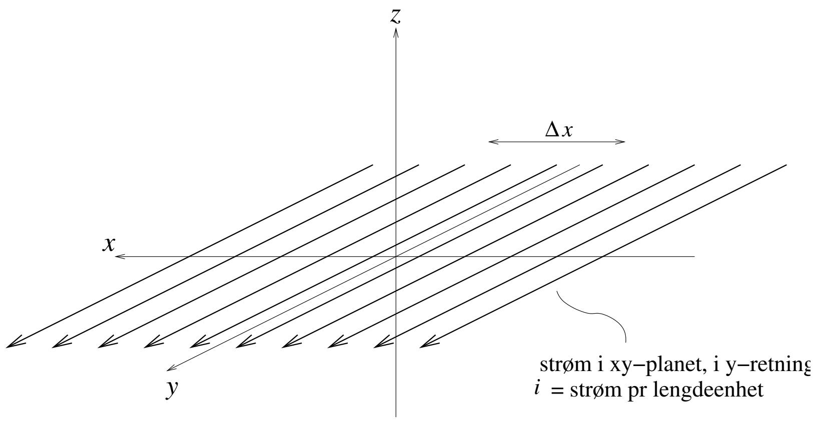
Oppgitt: Molar masse, jern: 55.9 g/mol. Massetetthet, jern: 7.9 g/cm^3. 1 mol = $6.02 \cdot 10^{23}$.

Oppgave 2

Vis, ved hjelp av Amperes lov, at magnetfeltet $\boldsymbol{B}$ fra en uniform "overflatestrøm" $\boldsymbol{i} = i\,\hat{y}$ som "flyter" i (hele) xy-planet i positiv y-retning er

$$\boldsymbol{B} = \begin{cases} -(\mu_0 i/2)\,\hat{x} & \text{for } z < 0 \\ +(\mu_0 i/2)\,\hat{x} & \text{for } z > 0 \end{cases}$$

(Altså uavhengig av avstanden til xy-planet, jfr elektrisk felt fra uendelig stort uniformt ladet plan.) Her er i strømmen *pr lengdeenhet* av x-retningen. Med andre ord, på en "stripe" med bredde Δx går det en strøm $\Delta I = i \cdot \Delta x$.



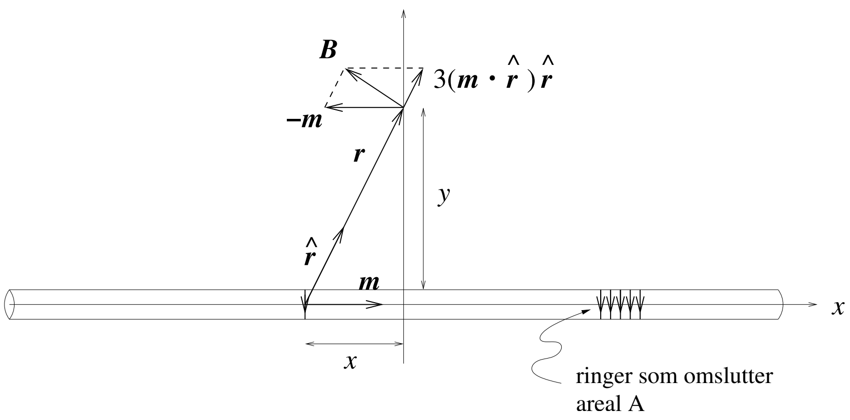
Tips:

- Det er altså oppgitt at både y- og z-komponenten av $\boldsymbol{B}$ er lik null. Bruk gjerne likevel litt tid på å overbevise deg om at sånn *må* det være. En slik "kartlegging" av symmetrien i problemet er helt *essensiell* for å kunne dra nytte av Amperes lov. Som regel må en da et lite øyeblikk tilbake til Biot-Savarts lov og vurdere konsekvensene av at "strømelementer" $I\,\boldsymbol{dl}$ gir bidrag $d\boldsymbol{B} \sim I\,\boldsymbol{dl} \times \hat{r}$ til det totale magnetfeltet.

- Hvis du etterhvert greier å overbevise deg om at en rektangulær Amperekurve med flatenormal i strømmens retning er et fornuftig valg, ja da er du antagelig på rett spor!

Oppgave 3

Med sentrum på x-aksen har vi plassert uendelig mange små strømførende ringer tett i tett, slik at strømmen I går i små sirkulære baner rundt x-aksen (samme strøm I i hver eneste ring).



Hver lille ring kan oppfattes som en *ideell* magnetisk dipol $\boldsymbol{m} = m\,\hat{x}$. Da kan det vises at magnetfeltet i avstand $\boldsymbol{r}$ fra en slik ring kan skrives på formen

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3\,(\boldsymbol{m}\cdot\hat{r})\,\hat{r} - \boldsymbol{m}\right]$$

Dette uttrykket er gyldig så lenge vi betrakter avstander r fra ringen som er store i forhold til ringens radius, med andre ord $r \gg \sqrt{A}$. (NB: Jeg har ikke utledet dette uttrykket for magnetfeltet fra en ideell dipol i forelesningene - vi godtar her rett og slett at slik er det!) I figuren ovenfor er det vist hvordan en dermed kan bestemme magnetfeltet fra en bestemt ring.

Noen av de små strømførende ringene bidrar med negativ x-komponent til $\boldsymbol{B}$ mens andre bidrar med positiv x-komponent til $\boldsymbol{B}$. Oppgaven går ut på å finne ut *hvor mange* ringer som bidrar med *negativ* x-komponent til $\boldsymbol{B}$. (Et eksempel er vist i figuren.)

La oss konkretisere oppgaven med noen tallverdier. Vi betrakter en posisjon som ligger i avstand $y = 50$ cm fra x-aksen, og vi antar at det er 1000 strømførende ringer pr meter (langs x-aksen). Vis at ca 707 ringer da vil bidra med negativ x-komponent til magnetfeltet $\boldsymbol{B}$ i den valgte avstanden 50 cm fra x-aksen. (Resten av ringene, dvs uendelig mange, vil bidra med positiv x-komponent til $\boldsymbol{B}$.)

Alternativt, og mer generelt: Finn et uttrykk for lengden $2x_0$ av intervallet $(-x_0, x_0)$ som inneholder ringene som bidrar med negativ x-komponent til $\boldsymbol{B}$ i avstand y fra x-aksen. Med n ringer pr lengdeenhet skulle antall slike ringer da bli $2nx_0$. (Du må med andre ord finne ut hvordan x_0 avhenger av y.)