Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2007

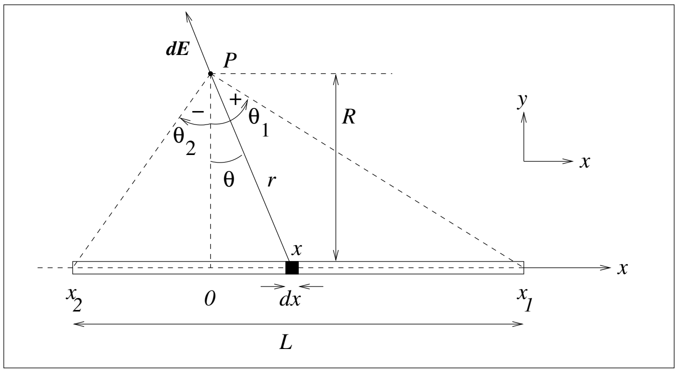
Løsningsforslag til øving 3

Veiledning uke 4

Oppgave 1

a) Med "linjeladning" (dvs: ladning pr lengdeenhet) λ må ladningene dq og Q på henholdsvis en liten lengde dx og på hele staven bli

$$dq = \lambda\, dx \qquad Q = \lambda L$$



b) Elektrisk felt fra lengdeelement dx i posisjon x:

$$d\boldsymbol{E} = \frac{\lambda\, dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = A\frac{dx}{r^2}\hat{r}$$

der vi har innført $A = \lambda/4\pi\varepsilon_0$. Fra figuren ser vi at denne vektoren har komponentene

$$dE_x = -dE\sin\theta = -\frac{A\,dx}{r^2}\sin\theta \qquad dE_y = dE\cos\theta = \frac{A\,dx}{r^2}\cos\theta$$

Her har vi valgt $x = 0$ når $\theta = 0$, og fortegnet stemmer med oppgaveteksten, dvs $\theta > 0$ når $x > 0$. Vi bruker tipset i oppgaven og uttrykker dx og $1/r^2$ ved vinkelen θ:

$$\begin{aligned}
x &= R\tan\theta \;\Rightarrow\; dx = \frac{Rd\theta}{\cos^2\theta} \\
r &= \frac{R}{\cos\theta} \;\Rightarrow\; \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\theta}{R^2} \\
\Rightarrow \frac{dx}{r^2} &= \frac{d\theta}{R}
\end{aligned}$$

De søkte komponentene E_x og E_y av feltet $\boldsymbol{E}$ i punktet P fra hele staven får vi ved å integrere dE_x og dE_y:

$$\begin{aligned} E_x &= \int dE_x = -\frac{A}{R}\int_{\theta_2}^{\theta_1} \sin\theta d\theta = \frac{A}{R}\Big|_{\theta_2}^{\theta_1} \cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \\ E_y &= \int dE_y = \frac{A}{R}\int_{\theta_2}^{\theta_1} \cos\theta d\theta = \frac{A}{R}\Big|_{\theta_2}^{\theta_1} \sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2) \end{aligned}$$

Kommentar: Her kunne en ha vært "uheldig" og startet med sammenhengen $x = r\sin\theta$, som gir $dx = r\cos\theta\, d\theta + \sin\theta\, dr$, ettersom både θ og r varierer med x. Men det går bra likevel: Vi har $\cos\theta = R/r$, dvs $r = R/\cos\theta$, og dermed

$$dr = -R\frac{1}{\cos^2\theta}(-\sin\theta)\, d\theta$$

slik at

$$\begin{aligned} \frac{dx}{r^2} &= \frac{r\cos\theta\, d\theta + \sin\theta\, dr}{r^2} \\ &= \frac{\cos\theta\, d\theta \cdot \cos\theta}{R} + \frac{\sin\theta \cdot R\sin\theta\, d\theta}{R^2} \\ &= \frac{d\theta}{R}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = \frac{d\theta}{R} \end{aligned}$$

c) Med P like langt fra stavens to ender er $\theta_1 = -\theta_2$ og følgelig $\cos\theta_1 - \cos\theta_2 = 0$ og $\sin\theta_1 - \sin\theta_2 = 2\sin\theta_1 = L/\sqrt{R^2 + L^2/4}$. Dermed:

$$E_x = 0$$

og

$$E = E_y = \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 R\sqrt{R^2 + L^2/4}}$$

Langt unna staven, dvs $R \gg L$: Vi kan nå erstatte kvadratroten med R, idet vi kan neglisjere $L^2/4$ i forhold til R^2. Vi får da:

$$E \simeq \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Dette er det samme som feltet fra en punktladning Q i avstand R. Ikke uventet: Langt unna ser staven essensielt ut som en punktladning med total ladning $Q = \lambda L$.

d) En uendelig lang stav oppnår vi ved å la $\theta_2 \to -\pi/2$ og $\theta_1 \to \pi/2$. Da blir igjen $E_x = 0$ og følgelig

$$E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

Med andre ord: Feltet fra en uendelig lang linjeladning faller av som en over avstanden R.

Oppgave 2

a) Arealet av en tynn ring med radius R og bredde dR er $dA = 2\pi R\,dR$, slik at ladningen på en slik ring blir

$$dq = \sigma\,dA = 2\pi\sigma R\,dR$$

Arealet av skiva er $A = \pi R_0^2$, så skivas totale ladning blir

$$Q = \sigma A = \pi\sigma R_0^2$$

Hvis en ikke husker hva arealet av ei sirkelformet skive er, kan en selvsagt bestemme totalladningen Q ved å integrere dq:

$$Q = \int dq = \int_0^{R_0} 2\pi\sigma R\,dR = 2\pi\sigma \left.\vphantom{\frac{R^2}{2}}\right|_0^{R_0} \frac{R^2}{2} = \pi\sigma R_0^2$$

Og om en heller ikke husker hva omkretsen av en ring er, kan ladningen på den tynne ringen bestemmes ved å starte med en liten vinkel $d\phi$ og arealet avgrenset mellom R og $R+dR$. Dette arealet er $Rd\phi \cdot dR$, og integrerer vi dette uttrykket over ϕ fra 0 til 2π, får vi nettopp $2\pi R\,dR$ som blir arealet av den tynne ringen med radius R og bredde dR.

b) Vi deler skiva opp i (infinitesimalt) tynne ringer med bredde dR (se figur nedenfor). Alle punkter på ringen ligger i samme avstand r fra punktet på z-aksen. Diametralt motsatte punkter (evt arealer dA) fører til at $x-$ og y-komponentene til feltet forsvinner (jfr eksemplet fra forelesningene). z-komponenten blir

$$dE_z = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

Da r er konstant rundt hele ringen, kan en la dQ være ladningen på hele den tynne ringen:

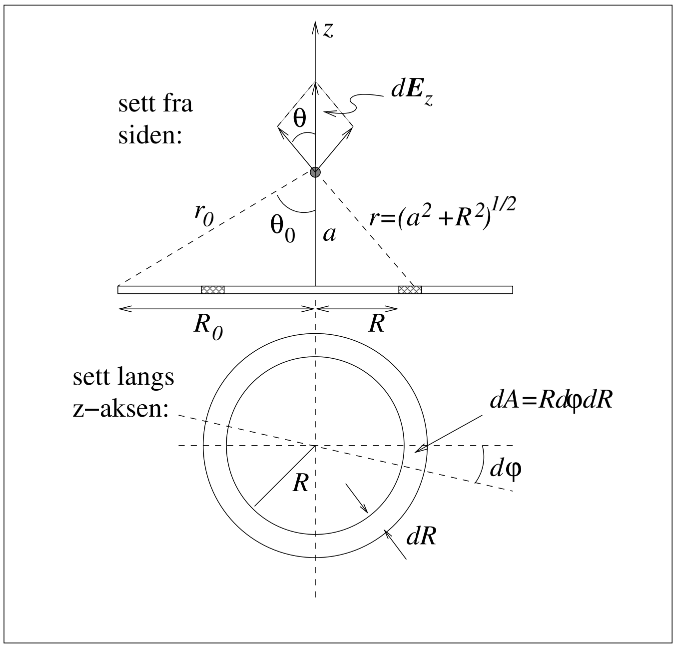
$$dQ = \sigma R\,dR \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi\sigma R\,dR$$

Dermed blir feltet fra hele skiva

$$E_z = \int dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{R_0} \frac{2\pi\sigma Ra\,dR}{(a^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}\left.\vphantom{\frac{(-1)}{\sqrt{a^2+R^2}}}\right|_0^{R_0} \frac{(-1)}{\sqrt{a^2+R^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+R_0^2}}\right)$$

Her har vi benyttet at

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}$$



Et alternativ ville ha vært å bruke vinkelen θ som integrasjonsvariabel:

$$
\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{R}{a} \quad\Rightarrow\quad d(\tan\theta) = \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{dR}{a} \\
r &= \frac{a}{\cos\theta} \\
\int_0^{R_0} \frac{R\,dR}{r^2}\cos\theta &= \int_0^{\theta_0} \left(\frac{\cos\theta}{a}\right)^2 a\tan\theta \frac{a\,d\theta}{\cos^2\theta}\cos\theta = \int_0^{\theta_0}\sin\theta\,d\theta \\
&= 1-\cos\theta_0 = 1-\frac{a}{r_0} = 1-\frac{a}{\sqrt{a^2+R_0^2}}
\end{aligned}
$$

der r_0 og θ_0 er definert i figuren over.

c) Når $a \gg R_0$, kunne en i første omgang (som i oppgave 1c) tenke seg å erstatte $\sqrt{a^2+R_0^2}$ med a. Da får vi imidlertid bare den "trivielle" løsningen $E_z = 0$, mens vi er interessert i det dominerende ikke-forsvinnende bidraget til E_z. Det betyr at vi må rekkeutvikle $\sqrt{a^2+R_0^2}$ og ta med så mange ledd at vi alt i alt ender opp med noe som er forskjellig fra null:

$$
\begin{aligned}
E_z &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{a}{a\sqrt{1+\frac{R_0^2}{a^2}}}\right) \\
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\left(1-\frac{R_0^2}{2a^2}+\cdots\right)\right) \\
&\simeq \frac{\sigma R_0^2}{4\varepsilon_0 a^2} \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}
\end{aligned}
$$

Her har vi brukt tilnærmelsen som var gitt i oppgaveteksten, $(1+\alpha)^{-1/2} \simeq 1 - \alpha/2$, med $\alpha = R_0^2/a^2 \ll 1$.
Dette er feltet i avstand a fra en punktladning $Q = \sigma A$, der $A = \pi R_0^2$ er arealet av sirkelskiva. Som forventet: Er vi tilstrekkelig langt borte, ser vi ikke forskjell på ei ladet skive og en punktladning.

I den motsatte grensen, $R_0 \gg a$, kan vi neglisjere leddet $a/\sqrt{a^2 + R_0^2}$ i forhold til 1. Vi får da

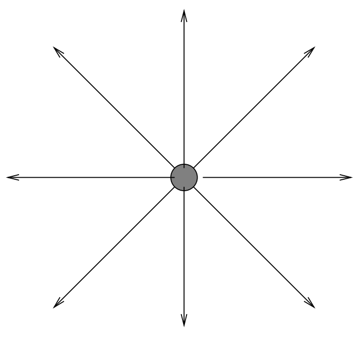
$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Altså et uniformt elektrisk felt som verken avhenger av avstanden a eller skivas utstrekning R_0. Dermed må dette være feltet utenfor et *uendelig stort plan* med ladningstetthet σ. Det er kanskje ikke umiddelbart opplagt at feltet da blir *uavhengig av avstanden* til planet, men slik er det altså! Selv om vi i praksis ikke har uendelig store flater til rådighet, er dette et viktig resultat: Med et stort ladet plan genererer vi et tilnærmet uniformt elektrisk felt i nærheten av planet, så lenge vi ikke kommer for nær planets ytterkanter. Vi skal bruke dette resultatet mange ganger utover i kurset.

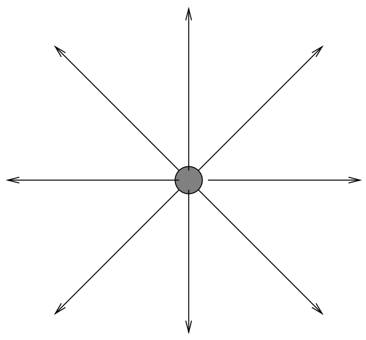
Oppgave 3

a)

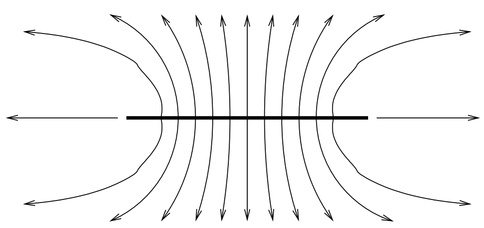
stav, plan normalt på, nært



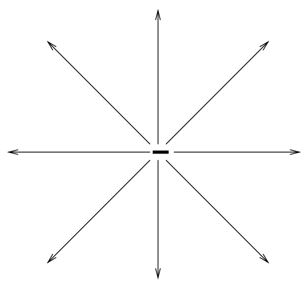
stav, plan normalt på, langt unna



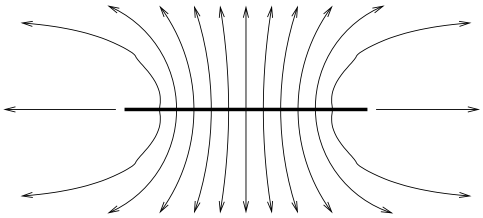
stav, plan inneholder staven, nært



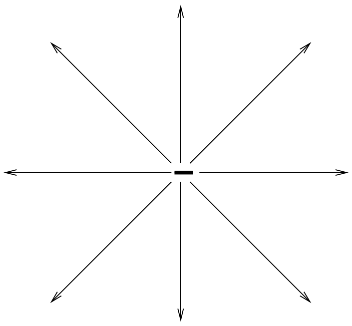
stav, plan inneholder staven, langt unna



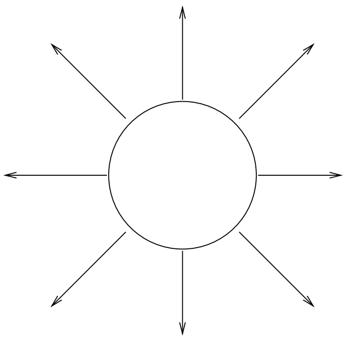
skive, plan normalt på, nært



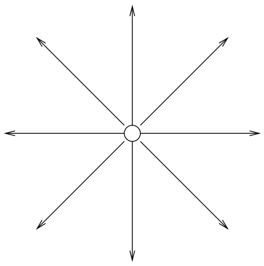
skive, plan normalt på, langt unna



skive, plan inneholder skiva, nært

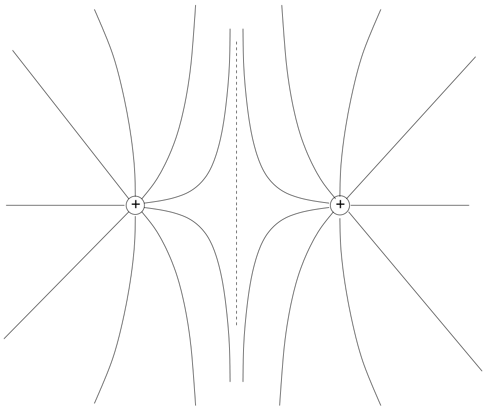


skive, plan inneholder skiva, langt unna

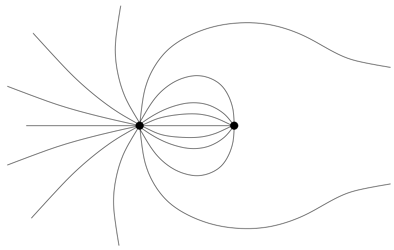


Kommentar: Disse skissene er bare *kvalitative*, ikke *kvantitative*. Legg spesielt merke til at langt unna (dvs, de fire i høyre kolonne) ser alt ut som en punktladning. På nært hold kan en som regel benytte symmetribetraktninger kombinert med det en vet om feltet i umiddelbar nærhet av eventuelle punktladninger til å tegne opp et temmelig korrekt bilde av feltlinjene.

b) (*i*) Feltlinjer rundt to like store positive punktladninger:



(ii) Feltlinjer rundt punktladninger $-2q$ og q:
"Nærbilde" (like mange feltlinjer ut pr positiv ladning q som inn pr negativ ladning $-q$, så dobbelt så mange inn mot $-2q$ som ut fra q. De "resterende" må komme fra uendelig):



Riktig langt unna (da ser vi essensielt en punktladning $-2q + q = -q$, dvs feltlinjene går *inn* mot ladningen):