Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2008

Løsningsforslag til øving 11

Oppgave 1

a) Dette systemet kan oppfattes som en seriekobling av tre motstander: de to 60 cm lange Cu–ledningene og motstanden $R = 20\ \Omega$. Motstanden til Cu–ledningene blir

$$R_C = \frac{l}{\sigma A} = \cdot \frac{1.20\text{m}}{5.8 \cdot 10^7\ \Omega^{-1}\text{m}^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\text{m}^2} = 0.01\ \Omega$$

Samme strømstyrke I går gjennom hele systemet. Den er

$$I = \frac{V}{R + R_C} = \frac{1.5\ \text{V}}{20.01\ \Omega} = 0.07496\ \text{A} \simeq 0.075\ \text{A}$$

ifølge Ohms lov. Vi får dermed spenningsfallene

$$V_R = RI = 20\ \Omega \cdot 0.075\ \text{A} \simeq 1.5\ \text{V}$$

over motstanden R og

$$V_C = R_C I = 0.01\ \Omega \cdot 0.075\ \text{A} = 0.00075\ \text{V}$$

over de to Cu–ledningene tilsammen. Konklusjon: Neglisjerbart spenningsfall i de to Cu–ledningene.

b) Strømstyrken I beregnet vi under punkt *a*). Utviklet effekt i motstanden R blir

$$P = V_R I = 1.5\ \text{V} \cdot 0.075\ \text{A} = 0.1125\ \text{W} \simeq 0.11\ \text{W}$$

c) Her må vi bestemme tettheten av frie elektroner n. Deretter kan vi bruke $I = j \cdot A = nevA$ til å beregne midlere driftshastighet v. I Cu har vi 8960 kg pr m^3. Dette tilsvarer 8960/0.06354 mol = 141014 mol = 141014 $\cdot 6.02 \cdot 10^{23}$ atomer = $8.49 \cdot 10^{28}$ atomer, og da like mange frie elektroner, med antagelsen ett fritt elektron pr atom Cu. Midlere driftshastighet blir

$$v = \frac{I}{neA} = \frac{0.075}{8.49 \cdot 10^{28} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 2.76 \cdot 10^{-6}\ \text{m/s} = 2.76\mu\text{m/s}$$

Midlere termiske hastighet for elektronene anslår vi ved å sette kinetisk energi lik termisk energi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{3}{2}k_B T \\ \Rightarrow v &= \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \simeq 10^5\ \text{m/s} \end{aligned}$$

Her er $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K Boltzmanns konstant. Vi ser at midlere driftshastighet er ca 11 størrelsesordener mindre enn midlere termiske hastighet. Det tar altså mange timer for et gitt elektron å komme seg fra den ene til den andre siden av systemet vårt!

Oppgave 2

a) Først er det en fordel å innse at vi her har [en parallellkobling av R_1, R_2 og R_3] i serie med [en parallellkobling av R_4 og $R_0 = 0$] i serie med [R_5]. Motstanden R_4 er med andre ord "kortsluttet", slik at det ikke vil gå noen strøm gjennom R_4. (Sagt på en annen måte: Vi har samme potensial på hver side av R_4, men da kan det heller ikke gå noen strøm gjennom denne motstanden.) Total motstand blir dermed

$$R = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} + R_5$$

b) Det er vel klart at den totale strømmen I må bli den samme som strømmen I_5 gjennom R_5. Dessuten er det klart at I må fordele seg på de 3 strømmene gjennom R_1, R_2 og R_3: $I = I_1 + I_2 + I_3$. Vi har i punkt *a*) allerede konkludert med at det ikke vil gå noen strøm gjennom R_4: $I_4 = 0$.
Spenningsfallet over de tre øverste motstandene er det samme:

$$V' = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3$$

Spenningsfallet over R_5 blir

$$V'' = R_5 I_5 = R_5 I = R_5 \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Disse to må tilsammen utgjøre den påtrykte spenningen:

$$\mathcal{E} = V' + V''$$

Dermed er

$$V' = \mathcal{E} - V'' = \mathcal{E} - R_5 \frac{\mathcal{E}}{R} = \mathcal{E}\left(1 - \frac{R_5}{R}\right)$$

Dessuten:

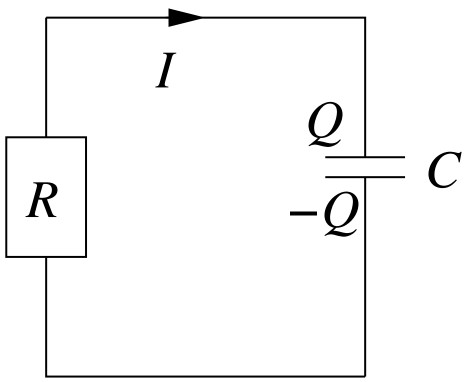
$$I_1 = \frac{V'}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{V'}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{V'}{R_3}$$

Oppgave 3

Kondensatoren vil lades ut ved at elektroner strømmer fra den negativt ladete siden ("platen") gjennom motstanden til den positivt ladete platen. Med andre ord, en positiv strøm vil gå gjennom R, fra positivt ladet plate.



I figuren er I tegnet med retning mot positiv plate, til tross for at vi ble enige om at positiv I går andre veien. Det skyldes at jeg foretrekker å beholde sammenhengen

$$I = +\frac{dQ}{dt}$$

(og ikke med omvendt fortegn). Kirchhoffs spenningsregel gir

$$-RI - \frac{Q}{C} = 0$$

dvs

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC}$$

Integrasjon på begge sider gir

$$Q = ke^{-t/RC}$$

og startbetingelsen $Q(0) = Q_0$ fastlegger integrasjonskonstanten k:

$$Q_0 = ke^0 = k$$

slik at

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$$

Strømmen blir dermed

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

Som ventet med et minustegn, slik at positiv I går mot klokka i figuren ovenfor.

Oppgave 4

a) Kirchhoffs spenningsregel (K2) gir

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{C}$$

Dessuten har vi

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

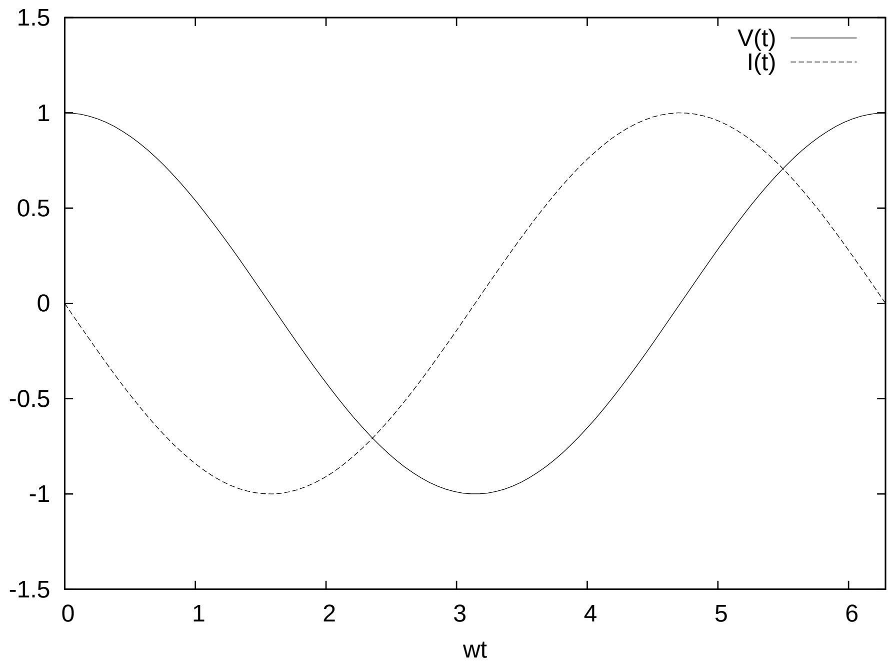
Dermed:

$$Q(t) = V_0 C \cos \omega t$$

og

$$I(t) = \dot{Q} = -V_0 \omega C \sin \omega t$$

Skisse av $\mathcal{E}(t)$ (i figuren $V(t)$, heltrukken linje) og $I(t)$ mellom $t = 0$ og $t = T = 2\pi/\omega$:



Vi ser at påtrykt spenning $\mathcal{E}(t)$ og resulterende strøm $I(t)$ i kretsen ikke er maksimale, null etc ved de samme tidspunkter. Vi sier at vi har en *faseforskyvning* mellom $\mathcal{E}(t)$ og $I(t)$. For denne enkle kretsen, med kun en kondensator, ser vi at I er null når $\mathcal{E}$ er maksimal, og omvendt. Altså er de to størrelsene faseforskjøvet med $\pi/2$. Dette ser vi kanskje klarest dersom vi skriver I på formen

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \alpha)$$

Vi har at

$$-\sin \omega t = \cos(\omega t + \pi/2)$$

Dermed ser vi at $I_0 = V_0 \omega C$ og $\alpha = -\pi/2$. Impedansen til denne enkle kretsen, dvs en enkelt kondensator med kapasitans C, blir

$$Z_C(\omega) = \frac{V_0}{I_0} = \frac{1}{\omega C}$$

Legg merke til at impedansen øker når (vinkel-)frekvensen blir mindre. I grensen $\omega \to 0$ går Z_C mot uendelig, som rimelig er: Ingen likestrøm gjennom en kondensator. I den andre grensen, $\omega \to \infty$, går Z_C mot null, hvilket heller ikke er urimelig: Ladningen på en gitt plate svinger mellom $+V_0 C$ og $-V_0 C$, uavhengig av hva frekvensen er. Når frekvensen økes, øker strømmen i kretsen simpelthen proporsjonalt med frekvensen. (Vi skal senere se hvordan magnetfeltet kommer inn og hindrer strømmen i en slik krets å vokse over alle grenser.)

b) Kirchhoffs spenningsregel (K2) gir

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{C} = RI_R$$

mens Kirchhoffs strømregel (K1) gir

$$I = I_C + I_R$$

Dessuten har vi

$$I_C = \frac{dQ}{dt}$$

Dermed:

$$\begin{aligned} I_R(t) &= \frac{V_0}{R} \cos \omega t \\ Q(t) &= V_0 C \cos \omega t \\ I_C(t) &= -\omega C V_0 \sin \omega t = \omega C V_0 \cos(\omega t + \pi/2) \end{aligned}$$

Total strøm levert av spenningskilden blir dermed

$$I(t) = \frac{V_0}{R} \cos \omega t - \omega C V_0 \sin \omega t$$

Vi ønsker å ha $I(t)$ på formen

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \alpha)$$

med amplitude $I_0 = V_0/Z$, der Z er impedansen til parallellkoblingen av R og C, mens α blir fasevinkelen, dvs faseforskyvningen mellom $\mathcal{E}(t)$ og $I(t)$. Vi har

$$\cos(\omega t - \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha + \sin \omega t \sin \alpha$$

Dermed, ved direkte sammenligning:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha}{Z} &= \frac{1}{R} \\ \frac{\sin \alpha}{Z} &= -\omega C \end{aligned}$$

Disse to ligningene, med to ukjente Z og α, løses lett, og vi finner

$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{R}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \\
I_0 &= \frac{V_0}{R}\sqrt{1+(\omega RC)^2} \\
\alpha &= -\arctan(\omega RC)
\end{aligned}
$$

I grensen $\omega \to 0$ bør vi gjenfinne "velkjente" resultater fra likespenningseksemplene i forelesningene, og det gjør vi: $Z \to R$ og $\alpha \to 0$ slik at $I_0 \to V_0/R$. All strøm går gjennom motstanden R, mens kapasitansen C nå representerer en åpen krets der det ikke går noen likestrøm.

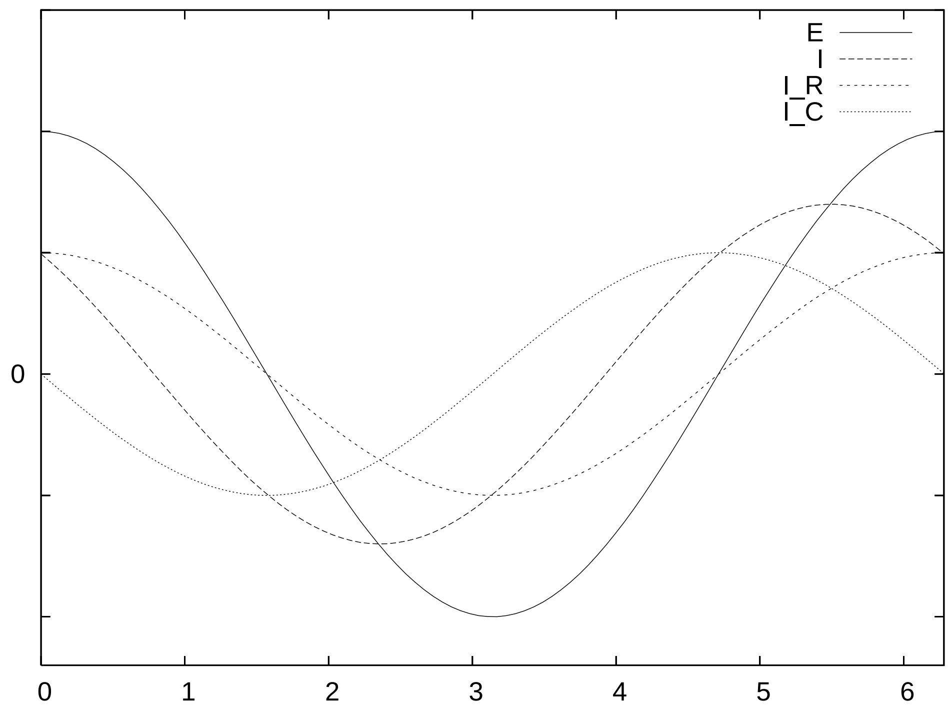
Med de oppgitte tallverdiene har vi

$$\omega RC = 2\pi \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 16 \cdot 10^{-9} = 1.0$$

slik at

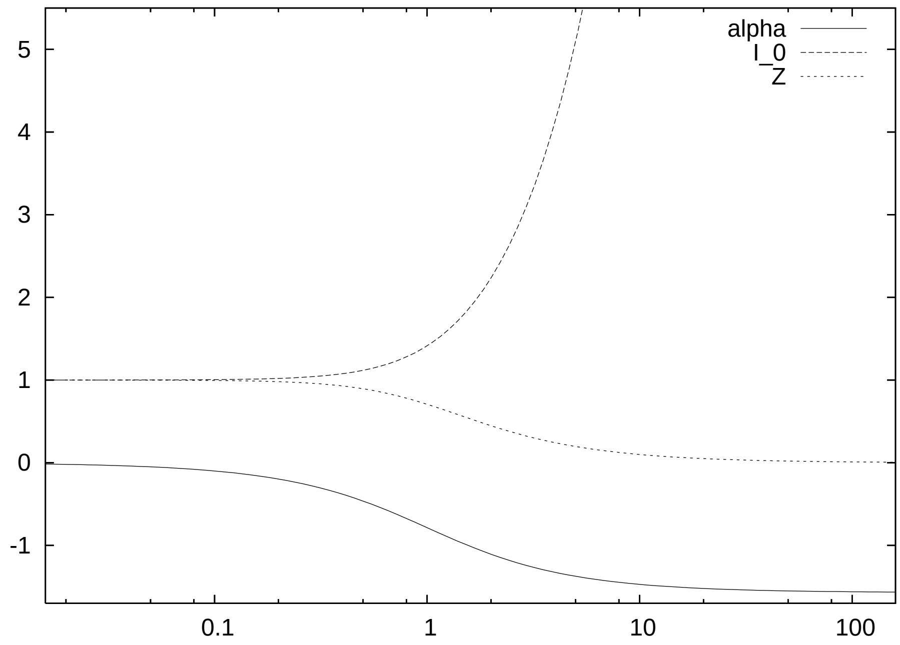
$$
\begin{aligned}
I_0 &= \frac{1.0}{10} \cdot \sqrt{2} = 0.14 \text{ A} \\
\alpha &= -\arctan 1.0 = -45^\circ
\end{aligned}
$$

Skisse av $\mathcal{E}(t)$, $I(t)$, $I_R(t)$ og $I_C(t)$:



Legg merke til at I_R svinger i fase med $\mathcal{E}$, mens I_C er faseforskjøvet $\pi/2$ i forhold til $\mathcal{E}$. Faseforskyvningen mellom $\mathcal{E}$ og total strøm $I = I_R + I_C$ blir med de aktuelle tallverdiene liggende midt mellom, dvs 45 grader.

Skisse av α, I_0 og Z (med α i radianer og ωRC mellom 0.016 og 160 langs horisontal akse):



Legg merke til at faseforskyvningen α mellom påtrykt spenning $\mathcal{E}$ og total strøm I er omtrent lik null for lave frekvenser. Da går det meste av strømmen gjennom motstanden ($I \simeq I_R$), og kretsen oppfører seg omtrent som den ville ha gjort uten kapasitansen til stede. For høye frekvenser blir α omtrent lik -90 grader. Da går det meste av strømmen i "grenen" med kondensatoren ($I \simeq I_C$), og kretsen oppfører seg omtrent som den ville ha gjort uten motstanden til stede.
For lave frekvenser blir dermed strømamplituden I_0 omtrent konstant, dvs uavhengig av frekvensen, mens for høye frekvenser øker I_0 proporsjonalt med frekvensen.
Vi ser at overgangen mellom "lave" og "høye" frekvenser skjer der $\omega \simeq 1/RC = 1/\tau$, der τ er tidskonstanten for en slik RC-krets.

Oppgave 5

1. Hele området mellom $r = a$ og $r = b$ kan oppfattes som en seriekobling av motstander dR, der hver motstand er et tynt kuleskall med radius r og tykkelse dr:

$$dR = \frac{\rho\, dr}{4\pi r^2}$$

Hele motstanden finner vi ved å legge sammen enkeltmotstandene, dvs ved å integrere fra $r = a$ til $r = b$:

$$\begin{aligned} R &= \int dR \\ &= \int_a^b \frac{\rho\, dr}{4\pi r^2} \\ &= \frac{\rho}{4\pi}\Big|_a^b \left(-\frac{1}{r}\right) \\ &= \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \end{aligned}$$

2. Det oppgitte uttrykket for strømstyrken I viser at vi her kan bruke Gauss' lov for det elektriske feltet til å bestemme I:

$$I = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Vi må her forutsette at ladningen som kommer inn på den innerste lederen umiddelbart fordeler seg jevnt over kuleflaten ved $r = a$ før den starter sin vandring gjennom materialet mellom $r = a$ og $r = b$.
Potensialforskjellen mellom indre og ytre lederskall bestemmes enkelt ettersom vi kjenner feltet $\boldsymbol{E}$:

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_a - V_b \\ &= -\int_b^a E(r)\, dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\Big|_b^a \frac{1}{r} \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \end{aligned}$$

Av disse uttrykkene følger det at motstanden er

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$