Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2008

Øving 13

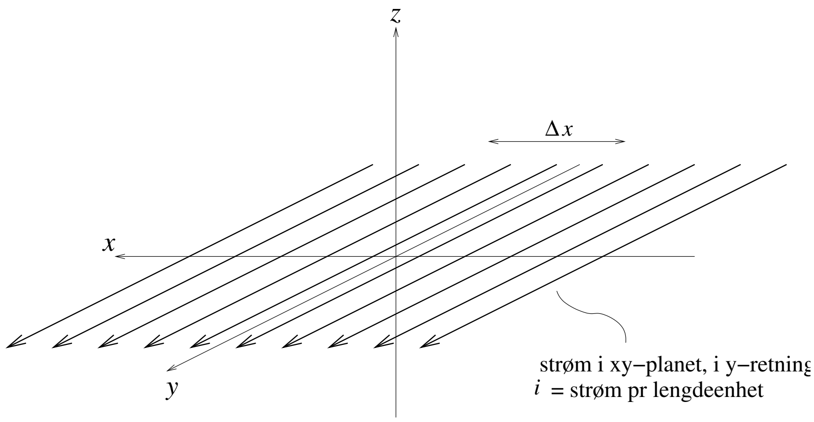
Veiledning: Fredag 11. og mandag 14. april
Innleveringsfrist: Fredag 18. april

Oppgave 1

Vis, ved hjelp av Amperes lov, at magnetfeltet $\boldsymbol{B}$ fra en uniform "overflatestrøm" $\boldsymbol{i} = i\,\hat{y}$ som "flyter" i (hele) xy-planet i positiv y-retning er

$$\boldsymbol{B} = \begin{cases} -(\mu_0 i/2)\,\hat{x} & \text{for } z < 0 \\ +(\mu_0 i/2)\,\hat{x} & \text{for } z > 0 \end{cases}$$

(Altså uavhengig av avstanden til xy-planet, jfr elektrisk felt fra uendelig stort uniformt ladet plan.) Her er i strømmen *pr lengdeenhet* av x-retningen. Med andre ord, på en "stripe" med bredde Δx går det en strøm $\Delta I = i \cdot \Delta x$.



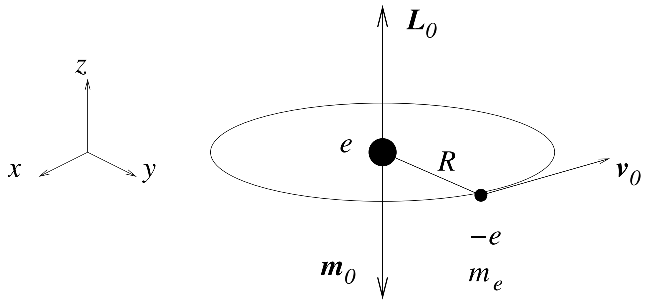
Tips:

- Det er altså oppgitt at både y- og z-komponenten av $\boldsymbol{B}$ er lik null. Bruk gjerne likevel litt tid på å overbevise deg om at sånn *må* det være. En slik "kartlegging" av symmetrien i problemet er helt *essensiell* for å kunne dra nytte av Amperes lov. Som regel må en da et lite øyeblikk tilbake til Biot-Savarts lov og vurdere konsekvensene av at "strømelementer" $I\,d\boldsymbol{l}$ gir bidrag $d\boldsymbol{B} \sim I\,d\boldsymbol{l} \times \hat{r}$ til det totale magnetfeltet.

- Hvis du etterhvert greier å overbevise deg om at en rektangulær Amperekurve med flatenormal i strømmens retning er et fornuftig valg, ja da er du antagelig på rett spor!

Oppgave 2

I denne oppgaven skal vi, med utgangspunkt i en klassisk atommodell, se nærmere på hvordan et ytre magnetfelt $\boldsymbol{B}$ vil påvirke elektronets banebevegelse rundt atomkjernen. En slik *diamagnetisk respons* får vi i alle atomer. (Mer om ulike typer magnetisme i forelesningene etterhvert!) Her kan vi for enkelhets skyld ha et hydrogenatom i tankene, med ett elektron med ladning $-e$ i sirkulær bane (i xy-planet) med radius R rundt en kjerne med ladning $+e$.

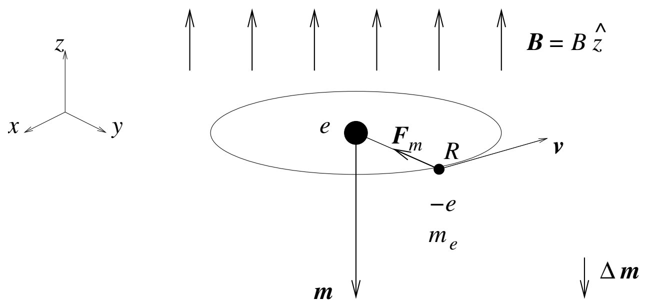


a) Uten et ytre magnetfelt tilstede er elektronets hastighet v_0. Vis at uniform sirkelbevegelse i Coulombfeltet fra atomkjernen da resulterer i en baneradius

$$R = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e v_0^2}$$

Hva blir elektronets banedreieimpuls $\boldsymbol{L}_0$ og magnetiske dipolmoment $\boldsymbol{m}_0$? (Vi ser her bort fra elektronets indre dreieimpuls, dets *spinn*.)

b) Vi skrur nå på et magnetfelt $\boldsymbol{B}$, for enkelhets skyld rettet normalt på elektronets sirkulære bane.



Elektronet påvirkes da, i tillegg til Coulombkraften fra kjernen, av en magnetisk kraft $\boldsymbol{F}_m = -e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ slik at bevegelsesligningen endres. Resultatet blir en endret sammenheng mellom elektronets hastighet v og banens radius R. Anta at magnetfeltet kun endrer hastigheten, og ikke banens radius R, og bestem hastigheten v. Bestem også det magnetiske dipolmomentet $\boldsymbol{m}$ og vis at *endringen*

$$\Delta\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_0$$

alltid vil være *motsatt rettet* $\boldsymbol{B}$, uansett om $\boldsymbol{B}$ peker “opp” eller “ned” i forhold til retningen på elektronets opprinnelige magnetiske dipolmoment $\boldsymbol{m}_0$.

Kommentarer:

- Vi har tidligere konkludert med at et statisk magnetfelt aldri utfører noe arbeid på en ladning i bevegelse ettersom $\boldsymbol{F}_m \perp \boldsymbol{v}$. Et statisk magnetfelt kan altså ikke endre ladningens hastighet (i absoluttverdi), tilsynelatende i konflikt med det vi har funnet ovenfor. Poenget er imidlertid at vi starter med $B = 0$ og *skrur på* et magnetfelt. Dermed har vi ikke hele tiden et statisk magnetfelt, men et felt som i løpet av en viss tid må endre seg fra null til sin endelige verdi. Som vi skal se i forelesningene, vil et tidsavhengig magnetfelt skape ("indusere") et elektrisk felt (Faradays induksjonslov), og et elektrisk felt kan som kjent endre hastigheten til et elektron.

- Fortegnet på den diamagnetiske responsen er et uttrykk for *Lenz' lov*, som kanskje noen har hørt om tidligere, og som vi skal komme tilbake til i forelesningene: Systemets "respons" er slik at den påtrykte endringen *motvirkes.*

- Strengt tatt er det nødvendig med en *kvantemekanisk* beskrivelse for å forklare diamagnetisme "skikkelig". Faktisk er det et *teorem* i statistisk fysikk som sier at for et system av klassiske ladete partikler i termisk likevekt i et ytre magnetfelt er det induserte magnetiske dipolmomentet *eksakt lik null* (Bohr - van Leeuwens teorem). Med andre ord: Diamagnetisme er en ren kvantemekanisk effekt! Likevel gir den enkle klassiske modellen med ett atom et brukbart kvalitativt bilde av effekten.

På neste side finner du et par ekstraoppgaver. Disse trenger du ikke å gjøre nå, for å få øvingen godkjent. Kos deg med dem når du har god tid.

Oppgave 3

Bruk Amperes lov til å bestemme magnetfeltet inni og utenfor en tettviklet smultringformet spole med N viklinger og strøm I i spoletråden. Det oppgis at magnetfeltet overalt er rettet tangentielt til en sirkel som er ko-planar med spolen, og som har sentrum på spolens akse. (Kanskje du greier å vise dette selv?) La s angi avstanden fra spolens akse.

Svar: $B = \mu_0 NI/2\pi s$ inni spolen, $B = 0$ utenfor spolen.

Oppgave 4

En (tynn) kvadratisk leder har sidekanter $2L$, fører en strøm I og ligger i xy-planet med sentrum i origo. Bestem magnetfeltet $\boldsymbol{B}$ i et punkt på x-aksen og i et punkt på z-aksen. Kontroller at svarene dine, for hhv store x og store z, er konsistente med uttrykket for magnetfeltet fra en ideell magnetisk dipol $\boldsymbol{B}_{\text{dipol}}(\boldsymbol{r})$, gitt nedenfor.

En *ideell magnetisk dipol* tilsvarer (formelt) at vi lar omsluttet areal A gå mot null, uten at dipolmomentet $m = IA$ forsvinner. Det innebærer at vi må la $I \to \infty$ og $A \to 0$ samtidig, og på en slik måte at produktet $m = IA$ blir endelig (dvs verken null eller uendelig). I *praksis* tilsvarer dette at vi befinner oss i stor avstand r fra dipolen.
Magnetfeltet fra en slik ideell magnetisk dipol kan skrives på såkalt *koordinatfri form*:

$$\boldsymbol{B}_{\text{dipol}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3\left(\boldsymbol{m}\cdot\hat{r}\right)\hat{r} - \boldsymbol{m}\right]$$

(Sammenlign med det tilsvarende uttrykket for elektrisk felt fra en ideell elektrisk dipol, øving 4.)