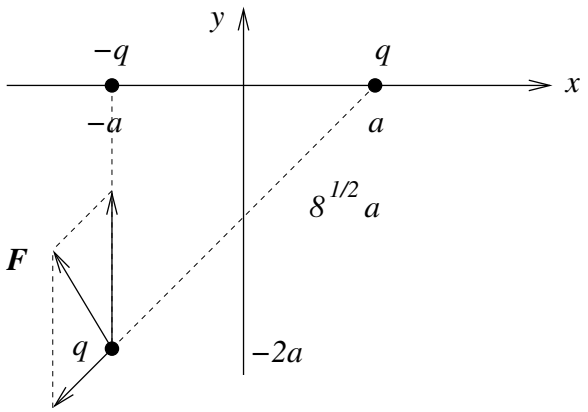
**Institutt for fysikk, NTNU**
**TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme**
**Vår 2008**

# Løsningsforslag til øving 2

*Oppgave 1*

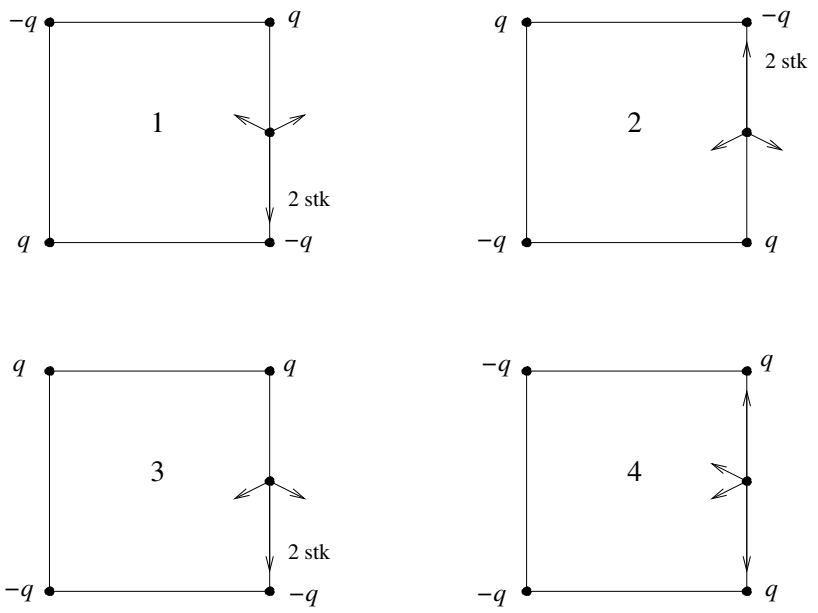
*a*) **A**
Her er det egentlig nok å betrakte retningene på delkreftene som bidrar:



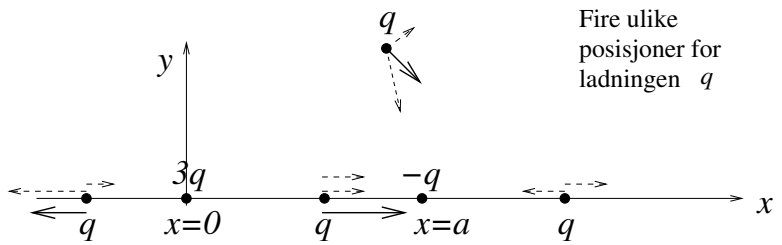

Med Pytagoras har vi at avstanden mellom de to positive ladningene er $\sqrt{8}a$. Ettersom coulombkraften er proporsjonal med $1/r^2$, må da kraften mellom de to positive bli halvparten så stor som kraften mellom den negative og den positive. Vektorsummen blir som vist i figuren, altså en total kraft $\boldsymbol{F}$ med *negativ* $x$-komponent og *positiv* $y$-komponent.
Både $x$- og $y$-komponenten av kraften fra den positive ladningen bestemmes ved å gange kraftens størrelse med en faktor $1/\sqrt{2}$, dvs hhv $\cos\pi/4$ og $\sin\pi/4$. Kraften mellom $-q$ og $q$ er lik $F_0/4$ (i absoluttverdi), dvs at kraften mellom $q$ og $q$ er lik $F_0/8$. Total kraft, på vektorform, er dermed

$$\boldsymbol{F} = \frac{F_0}{4}\hat{y} - \frac{F_0}{8\sqrt{2}}\hat{y} - \frac{F_0}{8\sqrt{2}}\hat{x}$$

*b*) **C**
Totalt elektrisk felt i P er vektorsummen av bidragene fra de fire punktladningene. Konfigurasjonen i figur 3 gir den største feltstyrken. (Ingen feltbidrag har her komponent oppover.)




*Oppgave 2*




*a*) Punktladningen $q$ er i likevekt dersom kraften på den er lik null. Her virker det to krefter, en frastøtende fra $3q$ og en tiltrekkende fra $-q$, og disse to kan bare kansellere hverandre dersom de har eksakt motsatt retning. Det er ikke mulig dersom $q$ er plassert utenfor $x$-aksen, f.eks. som i figuren over. (Her er de to enkeltkomponentene av kraften angitt med stiplede piler og totalkraften med heltrukken pil.) Derfor må eventuelle likevektsposisjoner være på $x$-aksen.

*b*) Vi har fått oppgitt at det er *en* likevektsposisjon $x_0$ for $q$ på $x$-aksen. Vi kan ikke ha $x_0$ mellom 0 og $a$, for på dette intervallet peker de to kraftkomponentene i samme retning. Vi kan heller ikke ha $x_0$ til venstre for $x = 0$, for da er avstanden mellom $q$ og $3q$ alltid mindre enn avstanden mellom $q$ og $-q$, og følgelig den frastøtende kraften $3q^2/4\pi\varepsilon_0 x_0^2$ alltid større enn den tiltrekkende kraften $q^2/4\pi\varepsilon_0(a - x_0)^2$. Altså må $x_0 > a$. Vi bestemmer $x_0$ ved å sette total kraft lik null:

$$0 \quad = \quad \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 x_0^2}\hat{x} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(x_0 - a)^2}\hat{x}$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \frac{3}{x_0^2} = \frac{1}{(x_0-a)^2} \\
&\Rightarrow \quad 3x_0^2 - 6ax_0 + 3a^2 = x_0^2 \\
&\Rightarrow \quad 2x_0^2 - 6ax_0 + 3a^2 = 0 \\
&\Rightarrow \quad x_0 = \frac{6a}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{36a^2 - 24a^2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}a \simeq 2.37a
\end{aligned}
$$

Da forutsetningen var $x_0 > a$, er løsningen med negativt fortegn foran kvadratroten ikke en aktuell løsning. (Den tilsvarer $x \simeq 0.63a$, hvor begge kraftkomponenter er like store og har *samme* retning.)

Stabiliteten av likevektsposisjonen $x_0$ bestemmes kanskje enklest ved å se på nettokraften når $x \gg x_0$. Da "ser" punktladningen $q$ tilnærmet en punktladning $3q - q = 2q$ og må følgelig erfare en netto frastøtende kraft. Vi vet at kraften er null bare i $x = x_0$. Da må kraften peke mot høyre for alle $x > x_0$, også for en liten forflytning til høyre for $x_0$, mens den må peke mot venstre for en liten forflytning til venstre for $x_0$. Dermed er likevekten ustabil mhp en forflytning langs $x$-aksen.

Alternativt, med litt regning: La oss først forenkle notasjonen ved å innføre funksjonen $f(x)$:

$$
\boldsymbol{F}(x) = F(x)\hat{x} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(x-a)^2}\right)\hat{x} \equiv \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} f(x)\hat{x}
$$

Deretter bestemmer vi $df/dx$ i $x = x_0$:

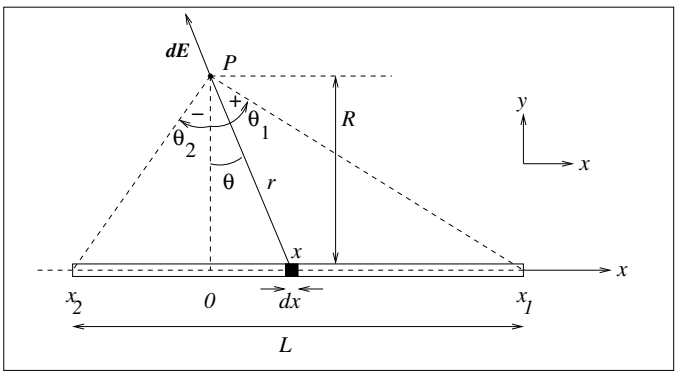
$$
\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} = -\frac{6}{x_0^3} + \frac{2}{(x_0-a)^3} \simeq -\frac{6}{(2.37a)^3} + \frac{2}{(1.37a)^3} \simeq \frac{0.33}{a^3} > 0
$$

Da $f(x_0) = 0$ og $f'(x_0) > 0$, er likevekten ustabil.

*Oppgave 3*

*a*) Med "linjeladning" (dvs: ladning pr lengdeenhet) $\lambda$ må ladningene $dq$ og $Q$ på henholdsvis en liten lengde $dx$ og på hele staven bli

$$
dq = \lambda\, dx \qquad Q = \lambda L
$$




*b*) Elektrisk felt fra lengdeelement $dx$ i posisjon $x$:

$$
d\boldsymbol{E} = \frac{\lambda\, dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = A\frac{dx}{r^2}\hat{r}
$$

der vi har innført $A = \lambda/4\pi\varepsilon_0$. Fra figuren ser vi at denne vektoren har komponentene

$$dE_x = -dE\sin\theta = -\frac{A\,dx}{r^2}\sin\theta \qquad dE_y = dE\cos\theta = \frac{A\,dx}{r^2}\cos\theta$$

Her har vi valgt $x = 0$ når $\theta = 0$, og fortegnet stemmer med oppgaveteksten, dvs $\theta > 0$ når $x > 0$. Vi bruker tipset i oppgaven og uttrykker $dx$ og $1/r^2$ ved vinkelen $\theta$:

$$\begin{aligned} x &= R\tan\theta \;\Rightarrow\; dx = \frac{Rd\theta}{\cos^2\theta} \\ r &= \frac{R}{\cos\theta} \;\Rightarrow\; \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\theta}{R^2} \\ \Rightarrow \frac{dx}{r^2} &= \frac{d\theta}{R} \end{aligned}$$

De søkte komponentene $E_x$ og $E_y$ av feltet $\boldsymbol{E}$ i punktet $P$ fra hele staven får vi ved å integrere $dE_x$ og $dE_y$:

$$\begin{aligned} E_x &= \int dE_x = -\frac{A}{R}\int_{\theta_2}^{\theta_1}\sin\theta d\theta = \frac{A}{R}\Big|_{\theta_2}^{\theta_1}\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right) \\ E_y &= \int dE_y = \frac{A}{R}\int_{\theta_2}^{\theta_1}\cos\theta d\theta = \frac{A}{R}\Big|_{\theta_2}^{\theta_1}\sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\sin\theta_1 - \sin\theta_2\right) \end{aligned}$$

Kommentar: Her kunne en ha vært "uheldig" og startet med sammenhengen $x = r\sin\theta$, som gir $dx = r\cos\theta\,d\theta + \sin\theta\,dr$, ettersom både $\theta$ og $r$ varierer med $x$. Men det går bra likevel: Vi har $\cos\theta = R/r$, dvs $r = R/\cos\theta$, og dermed

$$dr = -R\frac{1}{\cos^2\theta}(-\sin\theta)\,d\theta$$

slik at

$$\begin{aligned} \frac{dx}{r^2} &= \frac{r\cos\theta\,d\theta + \sin\theta\,dr}{r^2} \\ &= \frac{\cos\theta\,d\theta\cdot\cos\theta}{R} + \frac{\sin\theta\cdot R\sin\theta\,d\theta}{R^2} \\ &= \frac{d\theta}{R}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = \frac{d\theta}{R} \end{aligned}$$

*c*) Med $P$ like langt fra stavens to ender er $\theta_1 = -\theta_2$ og følgelig $\cos\theta_1 - \cos\theta_2 = 0$ og $\sin\theta_1 - \sin\theta_2 = 2\sin\theta_1 = L/\sqrt{R^2 + L^2/4}$. Dermed:

$$E_x = 0$$

og

$$E = E_y = \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 R\sqrt{R^2 + L^2/4}}$$

Langt unna staven, dvs $R \gg L$: Vi kan nå erstatte kvadratroten med $R$, idet vi kan neglisjere $L^2/4$ i forhold til $R^2$. Vi får da:

$$E \simeq \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Dette er det samme som feltet fra en punktladning $Q$ i avstand $R$. Ikke uventet: Langt unna ser staven essensielt ut som en punktladning med total ladning $Q = \lambda L$.

*d*) En uendelig lang stav oppnår vi ved å la $\theta_2 \to -\pi/2$ og $\theta_1 \to \pi/2$. Da blir igjen $E_x = 0$ og følgelig

$$E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

Med andre ord: Feltet fra en uendelig lang linjeladning faller av som en over avstanden $R$.

*Oppgave 4*

*a*) Arealet av en tynn ring med radius $R$ og bredde $dR$ er $dA = 2\pi R\, dR$, slik at ladningen på en slik ring blir

$$dq = \sigma\, dA = 2\pi\sigma R\, dR$$

Arealet av skiva er $A = \pi R_0^2$, så skivas totale ladning blir

$$Q = \sigma A = \pi\sigma R_0^2$$

Hvis en ikke husker hva arealet av ei sirkelformet skive er, kan en selvsagt bestemme totalladningen $Q$ ved å integrere $dq$:

$$Q = \int dq = \int_0^{R_0} 2\pi\sigma R\, dR = 2\pi\sigma \left|_0^{R_0} \frac{R^2}{2} = \pi\sigma R_0^2\right.$$

Og om en heller ikke husker hva omkretsen av en ring er, kan ladningen på den tynne ringen bestemmes ved å starte med en liten vinkel $d\phi$ og arealet avgrenset mellom $R$ og $R + dR$. Dette arealet er $Rd\phi \cdot dR$, og integrerer vi dette uttrykket over $\phi$ fra 0 til $2\pi$, får vi nettopp $2\pi R\, dR$ som blir arealet av den tynne ringen med radius $R$ og bredde $dR$.

*b*) Vi deler skiva opp i (infinitesimalt) tynne ringer med bredde $dR$ (se figur nedenfor). Alle punkter på ringen ligger i samme avstand $r$ fra punktet på $z$-aksen. Diametralt motsatte punkter (evt arealer $dA$) fører til at $x-$ og $y$-komponentene til feltet forsvinner (jfr eksemplet fra forelesningene). $z$-komponenten blir

$$dE_z = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

Da $r$ er konstant rundt hele ringen, kan en la $dQ$ være ladningen på hele den tynne ringen:

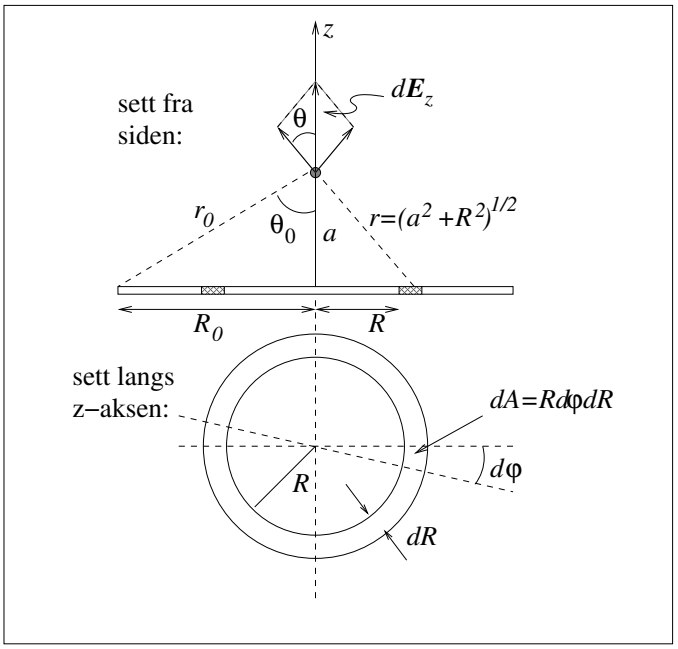
$$dQ = \sigma R\, dR \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi\sigma R\, dR$$

Dermed blir feltet fra hele skiva

$$E_z = \int dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{R_0} \frac{2\pi\sigma R a\, dR}{(a^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}\Bigg|_0^{R_0} \frac{(-1)}{\sqrt{a^2+R^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+R_0^2}}\right)$$

Her har vi benyttet at

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}$$




Et alternativ ville ha vært å bruke vinkelen $\theta$ som integrasjonsvariabel:

$$\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{R}{a} \quad\Rightarrow\quad d(\tan\theta) = \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{dR}{a} \\
r &= \frac{a}{\cos\theta} \\
\int_0^{R_0} \frac{R\,dR}{r^2}\cos\theta &= \int_0^{\theta_0} \left(\frac{\cos\theta}{a}\right)^2 a\tan\theta \frac{a\,d\theta}{\cos^2\theta}\cos\theta = \int_0^{\theta_0}\sin\theta\,d\theta \\
&= 1-\cos\theta_0 = 1 - \frac{a}{r_0} = 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+R_0^2}}
\end{aligned}$$

der $r_0$ og $\theta_0$ er definert i figuren over.

*c*) Når $a \gg R_0$, kunne en i første omgang (som i oppgave 1c) tenke seg å erstatte $\sqrt{a^2+R_0^2}$ med $a$. Da får vi imidlertid bare den "trivielle" løsningen $E_z = 0$, mens vi er interessert i det dominerende ikke-forsvinnende bidraget til $E_z$. Det betyr at vi må rekkeutvikle $\sqrt{a^2+R_0^2}$ og ta med så mange ledd at vi alt i alt ender opp med noe som er forskjellig fra null:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{a\sqrt{1+\frac{R_0^2}{a^2}}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\left(1-\frac{R_0^2}{2a^2}+\cdots\right)\right)\\
&\simeq \frac{\sigma R_0^2}{4\varepsilon_0 a^2}\\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}
\end{aligned}
$$

Her har vi brukt tilnærmelsen som var gitt i oppgaveteksten, $(1+\alpha)^{-1/2} \simeq 1-\alpha/2$, med $\alpha = R_0^2/a^2 \ll 1$.
Dette er feltet i avstand $a$ fra en punktladning $Q = \sigma A$, der $A = \pi R_0^2$ er arealet av sirkelskiva. Som forventet: Er vi tilstrekkelig langt borte, ser vi ikke forskjell på ei ladet skive og en punktladning.

I den motsatte grensen, $R_0 \gg a$, kan vi neglisjere leddet $a/\sqrt{a^2+R_0^2}$ i forhold til 1. Vi får da

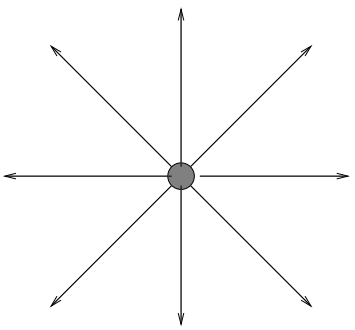
$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Altså et uniformt elektrisk felt som verken avhenger av avstanden $a$ eller skivas utstrekning $R_0$. Dermed må dette være feltet utenfor et *uendelig stort plan* med ladningstetthet $\sigma$. Det er kanskje ikke umiddelbart opplagt at feltet da blir *uavhengig av avstanden* til planet, men slik er det altså! Selv om vi i praksis ikke har uendelig store flater til rådighet, er dette et viktig resultat: Med et stort ladet plan genererer vi et tilnærmet uniformt elektrisk felt i nærheten av planet, så lenge vi ikke kommer for nær planets ytterkanter. Vi skal bruke dette resultatet mange ganger utover i kurset.

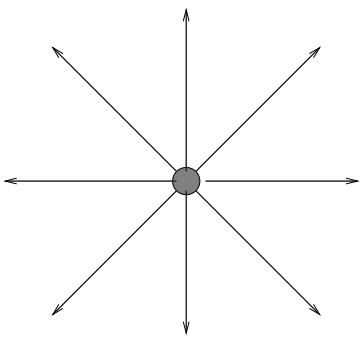
*Oppgave 5*

*a*)

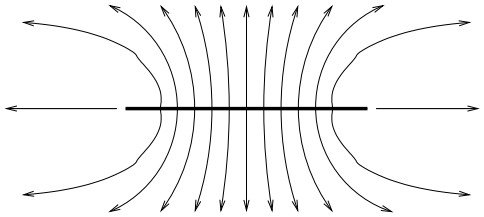
stav, plan normalt på, nært



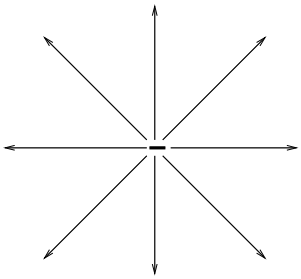
stav, plan normalt på, langt unna



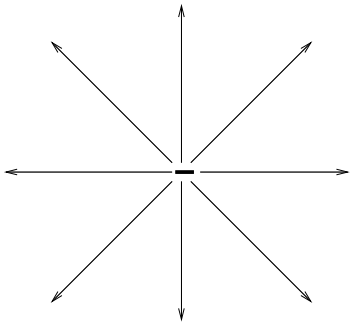
stav, plan inneholder staven, nært



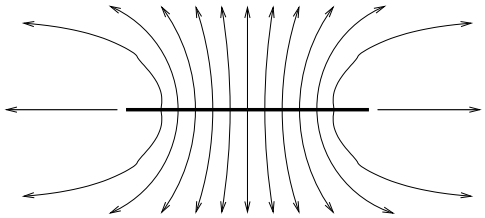
stav, plan inneholder staven, langt unna



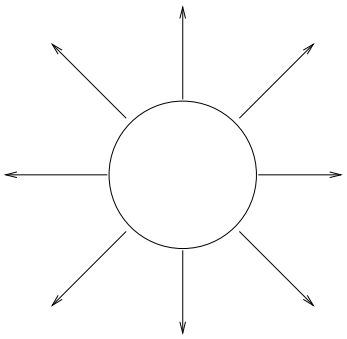
skive, plan normalt på, langt unna



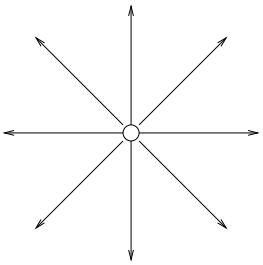
skive, plan normalt på, nært



skive, plan inneholder skiva, nært

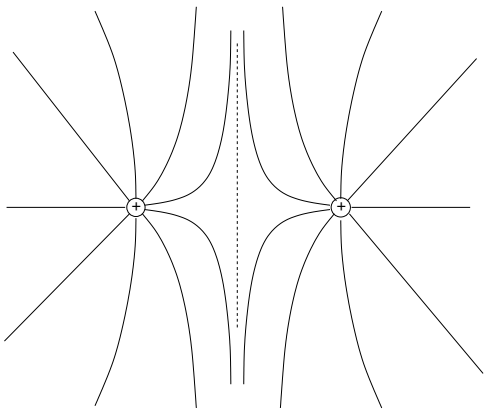


skive, plan inneholder skiva, langt unna

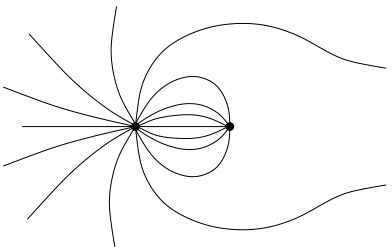


Kommentar: Disse skissene er bare *kvalitative*, ikke *kvantitative*. Legg spesielt merke til at langt unna (dvs, de fire i høyre kolonne) ser alt ut som en punktladning. På nært hold kan en som regel benytte symmetribetraktninger kombinert med det en vet om feltet i umiddelbar nærhet av eventuelle punktladninger til å tegne opp et temmelig korrekt bilde av feltlinjene.

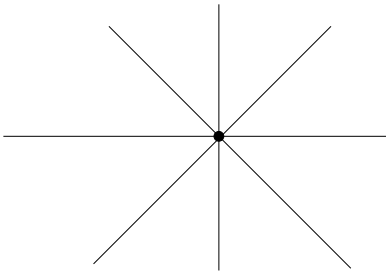
*b*) (*i*) Feltlinjer rundt to like store positive punktladninger:



(*ii*) Feltlinjer rundt punktladninger $-2q$ og $q$:
"Nærbilde" (like mange feltlinjer ut pr positiv ladning $q$ som inn pr negativ ladning $-q$, så dobbelt så mange inn mot $-2q$ som ut fra $q$. De "resterende" må komme fra uendelig):



Riktig langt unna (da ser vi essensielt en punktladning $-2q + q = -q$, dvs feltlinjene går *inn* mot ladningen):



*Oppgave 6*

Av symmetrigrunner må alle bindingslengder N-H være like store i $NH_3$, og tilsvarende for bindingslengdene B-F i $BF_3$. Dessuten må alle bindingsvinkler H-N-H være like store, og tilsvarende for F-B-F. Da har vi kun to muligheter: Enten er molekylet plant eller så er det pyramideformet, med de 3 like atomene i grunnplanet og det siste på toppen. I disse to molekylene må vi forvente litt ulik grad av *elektronegativitet* dvs "evne til å tiltrekke seg ekstra elektroner". I $BF_3$ blir F litt negativt ($-q$) og B litt positivt ($+3q$), i $NH_3$ blir H litt positivt ($+q$)

mens N blir litt negativt ($-3q$). Vi får i hvert molekyl et totalt dipolmoment lik vektorsummen av tre dipolmoment assosiert med tre ladningspar $q$ og $-q$. Hvis molekylet er plant, blir summen av disse tre lik null, hvis molekylet er pyramidalt, blir summen ikke lik null. Konklusjonen må bli at $BF_3$ er et plant molekyl og at $NH_3$ har pyramidal struktur. Og slik er det da også i virkeligheten! Eksperimenter viser at vinklene F-B-F alle er 120 grader, mens vinklene H-N-H er ca 107 grader.
Se for eksempel:
http://en.wikipedia.org/wiki/Ammonia
http://en.wikipedia.org/wiki/Boron_trifluoride.