Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2008

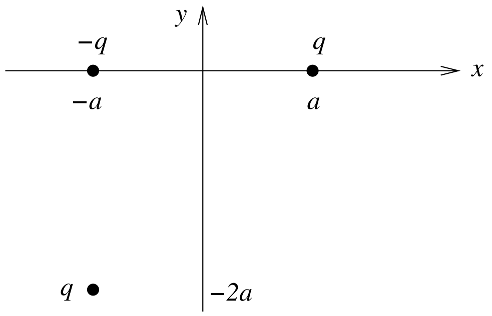
Øving 2

Veiledning: Fredag 18. og mandag 21. januar
Innleveringsfrist: Fredag 25. januar kl 12.00

Oppgave 1 (fra tidligere midtsemesterprøver)

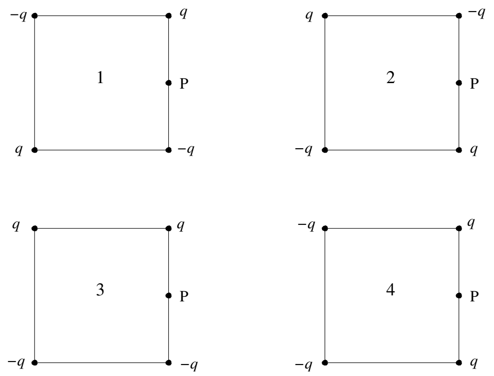
a) To punktladninger q og $-q$ er plassert på x-aksen, med q i $(x, y) = (a, 0)$ og $-q$ i $(-a, 0)$. Da blir kraften fra disse på en tredje punktladning q i $(-a, -2a)$

A $\left[-\hat{x} + \left(2\sqrt{2} - 1\right)\hat{y}\right] F_0/8\sqrt{2}$
B $\left[-\hat{x} - \left(2\sqrt{2} - 1\right)\hat{y}\right] F_0/8\sqrt{2}$
C $\left[\hat{x} - \left(2\sqrt{2} - 1\right)\hat{y}\right] F_0/8\sqrt{2}$
D $\left[\hat{x} + \left(2\sqrt{2} - 1\right)\hat{y}\right] F_0/8\sqrt{2}$
der $F_0 = q^2/4\pi\varepsilon_0 a^2$.



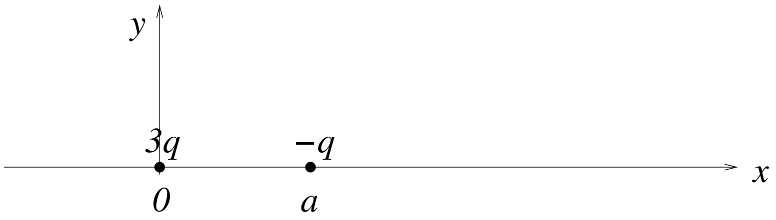
b) To positive og to negative punktladninger, alle fire like store i absoluttverdi (q), skal plasseres i hvert sitt hjørne av et kvadrat. På hvilken måte skal punktladningene plasseres for å oppnå størst mulig elektrisk feltstyrke midt på høyre sidekant, i punktet P?

A 1
B 2
C 3
D 4



Kommentar: På midtsemesterprøven i dette faget skal slike oppgaver *kun* besvares med en bokstav, dvs *uten* utregning eller begrunnelse. Ettersom dette er en regneøving, foreslår jeg at du svarer *med* begrunnelse og/eller utregning (dvs: som vanlig på en regneøving!).

Oppgave 2



a) To punktladninger $3q$ og $-q$ er plassert på x-aksen i henholdsvis $x = 0$ og $x = a$. Forklar hvorfor mulige likevektsposisjoner for en tredje ladning q må være på x-aksen.

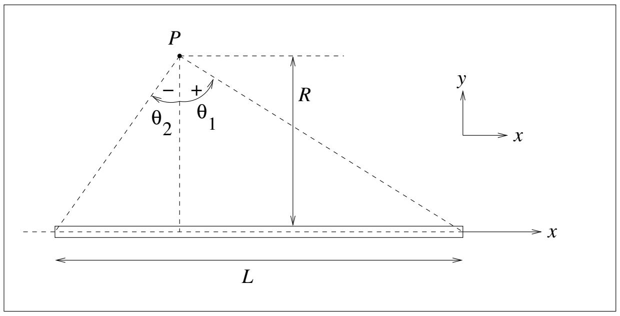
b) Det er *en* likevektsposisjon x_0 på x-aksen for denne tredje ladningen. (I tillegg til det "singulære" punktet $x = a$.) Bestem x_0. Begrunn, *uten* ytterligere regning, at denne likevekten er ustabil med hensyn på en liten forflytning i x-retning. (Alternativt, *med* ytterligere regning: Vurder stabiliteten av likevekten ved å se på dF/dx i $x = x_0$.)

[I *likevekt* virker det ingen netto kraft på ladningen. Når den forskyves en avstand Δx fra likevektsposisjonen, vil den påvirkes av en kraft. Dersom denne kraften virker i samme retning som Δx, er likevekten ustabil, i motsatt fall stabil.]

Oppgave 3

En tynn stav med lengde L har uniform ladning λ pr lengdeenhet.

a) Hvor mye ladning dq er det på en liten lengde dx av staven? Hva er stavens totale ladning Q?



b) Vi legger staven på x-aksen, slik at punktet P har koordinater $(x, y) = (0, R)$. Vis at det elektriske feltet i P, dvs i avstand R fra staven, er gitt ved $\boldsymbol{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y}$, med

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \qquad E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)$$

Her er θ_1 og θ_2 vinklene som dannes mellom linjene fra P til stavens endepunkter og normalen til staven gjennom P (dvs y-aksen), som vist i figuren. (Fortegnet til vinklene er som indikert i figuren, dvs θ er negativ når $x < 0$).

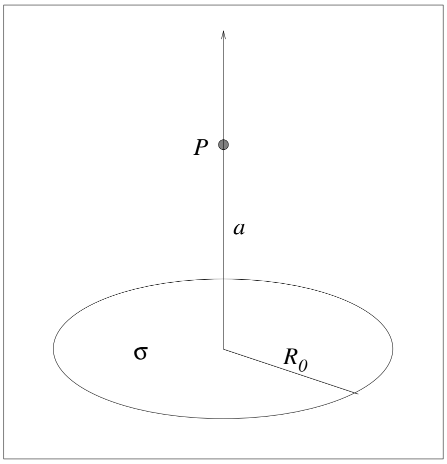
[Tips: Feltet $d\boldsymbol{E}$ fra en liten bit dx av staven (i posisjon x) er $d\boldsymbol{E} = (\lambda\, dx/4\pi\varepsilon_0 r^2)\hat{r}$, der $\boldsymbol{r}$ er avstandsvektoren fra biten dx til punktet P. Prøv deretter å ende opp med θ som integrasjonsvariabel ved å finne en sammenheng mellom x og θ.]

c) Bestem feltet når P er like langt fra stavens to ender. Hva blir $\boldsymbol{E}$ når P er langt unna staven (dvs $R \gg L$). NB: Her er vi ikke ute etter (det i og for seg korrekte) svaret $\boldsymbol{E} \simeq 0$ for $R \to \infty$, men derimot hvordan $\boldsymbol{E}$ avhenger av R "til ledende orden" for $R \gg L$. Er svaret som forventet?

d) Hva blir det elektriske feltet i avstand R fra en uendelig lang uniformt ladet stav? (Dvs: $L \to \infty$)

Oppgave 4

Ei tynn, sirkelforma skive med radius R_0 har uniform ladning σ pr flateenhet.



a) Hvor mye ladning dq er det på en tynn ring av skiva, med radius R og bredde dR? Hva er skivas totale ladning Q?

b) Finn den elektriske feltstyrken $\boldsymbol{E}$ i et punkt P på symmetriaksen i en avstand a fra skiva. (Tips: Finn først feltet $d\boldsymbol{E}$ i P fra en tynn ring med radius R og bredde dR, og integrer deretter fra $R = 0$ til $R = R_0$.)

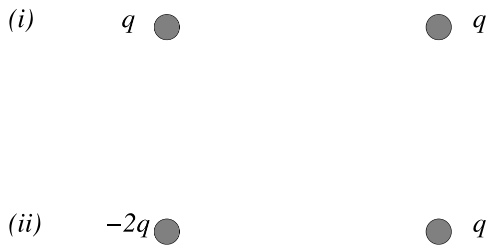
c) Hva blir $\boldsymbol{E}$ (igjen: til ledende orden, jfr Oppg 1c) i de to tilfellene $a \gg R_0$ og $a \ll R_0$, dvs henholdsvis langt unna og nært inntil skiva? (Du drar kanskje kjensel på svaret i tilfellet $a \gg R_0$? Tenk dessuten litt på hva det andre tilfellet, $R_0 \gg a$, innebærer.)

Oppgitt: $(1+\alpha)^{\pm 1/2} \simeq 1 \pm \alpha/2$ dersom $\alpha \ll 1$.
(Dette er ikke noe mystisk, men rett og slett de to første leddene i Taylorutviklingen av funksjonene $f(\alpha) = (1+\alpha)^{\pm 1/2}$ om punktet $\alpha = 0$. Se notatet rekkeutvikling.pdf under samme katalog som fagets hjemmeside.)

Oppgave 5

a) For staven og skiva i oppgave 3 og 4, prøv å skissere elektriske feltlinjer, både i et plan som inneholder staven (skiva) og i et plan normalt på staven gjennom dens midtpunkt (normalt på skiva gjennom dens sentrum). Vis skissene i stor og liten målestokk i hvert av de fire tilfellene, slik at de gir et kvalitativt bilde av feltet, både nært og langt unna staven (skiva). (I alt 8 figurer.)

b) Skisser elektriske feltlinjer for disse to systemene av punktladninger:



Tips: I denne oppgaven kan det være til hjelp å gå inn på f.eks. http://www.falstad.com/vector3de, som er en Java applet for å visualisere (blant annet) elektriske feltlinjer ("Display: Field Lines") fra diverse ladningsfordelinger (punktladninger og kontinuerlige fordelinger). "finite line" representerer nettopp den ladete staven. Det nærmeste vi kommer den sirkulære skiva er "charged plate", som har endelig utstrekning i x-retning. Stavlengden og platestørrelsen kan varieres med det nederste rullefeltet.

Oppgave 6

Ammoniakk, NH_3, er en elektrisk dipol, bortrifluorid, BF_3, er det ikke. Bruk denne opplysningen til å finne ut (kvalitativt) hvordan disse to molekylene ser ut. Kontroller svaret ditt via internett eller andre kilder.

Fasitsvar:

Oppgave 2b: $x_0 = (3 + \sqrt{3})a/2$.

Oppgave 4b: $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+R_0^2}}\right)$