Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2008

Løsningsforslag til øving 5

Oppgave 1

Denne oppgaven dreier seg om å bruke Gauss' lov,

$$\phi = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = Q/\varepsilon_0.$$

Det første vi kan merke oss er at $\boldsymbol{E} = E_x\hat{x}$ i de to første tilfellene har retning langs x-aksen. Det betyr at det da ikke går noe fluks gjennom de av kubens flater som har flatenormal i y- eller z-retning, bare gjennom de to flatene med flatenormal i x-retning. I tilfelle c) må vi også ta med flatene med flatenormal i y-retning.

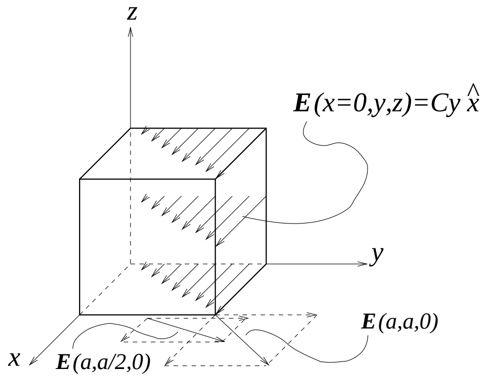
a) Her er $E_x = C$, dvs konstant. Da må vi ha like stor elektrisk fluks inn gjennom flaten ved $x = 0$ som vi har ut gjennom flaten ved $x = a$:

$$\phi_{\text{inn}} = \phi_{\text{ut}} = E_x A = Ca^2$$

der $A = a^2$ er arealet av en sideflate. Dermed blir netto fluks $\phi = 0$ gjennom kubens overflate, og ifølge Gauss' lov også netto ladning inne i kuben $Q = 0$.

b) Her er $E_x = Cx^2$, dvs $E_x(0) = 0$, mens $E_x(a) = Ca^2$. Vi får null fluks gjennom flaten ved $x = 0$, mens fluks ut ved $x = a$ blir $\phi_{\text{ut}}(x = a) = Ca^2 \cdot a^2 = Ca^4$, som blir netto fluks gjennom S. Med Gauss' lov: $Q = C\varepsilon_0 a^4$ for netto ladning i kuben.

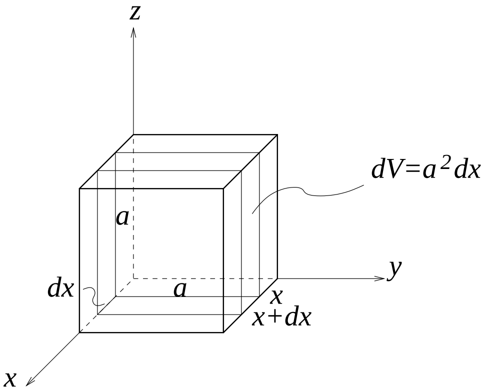
c) Nå er $E_x = Cy$ og $E_y = Cx$, og vi får fluks gjennom i alt fire av de seks sideflatene. Figuren illustrerer feltet på planet $x = 0$. I tillegg har vi tatt med et par eksempler på planet $x = a$, hvor y-komponenten av feltet er konstant og lik Ca, mens x-komponenten vokser lineært med y.



Det hele kan kanskje se litt komplisert ut, men forenkler seg drastisk ved nærmere ettertanke: Vi ser nemlig at E_x ikke avhenger av x og tilsvarende at E_y ikke avhenger av y. Det betyr at fluksen inn gjennom flaten ved $x = 0$ må være like stor som fluksen ut gjennom flaten ved $x = a$.

På samme vis: Like stor fluks inn gjennom flaten ved $y = 0$ som ut ved $y = a$. Konklusjon: Null netto fluks gjennom hele den lukkede flaten, og null netto ladning innenfor flaten, ifølge Gauss' lov.

d) Vi skal for tilfellet *b*), dvs med $\boldsymbol{E} = Cx^2\hat{x}$, bestemme ladningstettheten ρ inne i kuben.
Vi følger henvisningene i oppgaveteksten og starter med å se på et lite volumelement $dV = a^2\,dx$, dvs en tynn skive beliggende mellom x og $x + dx$:



For å finne netto fluks ut gjennom overflaten til denne tynne skiva, må vi bestemme fluksen *inn* ved x og fluksen *ut* ved $x + dx$. Det elektriske feltet på disse to flatene er:

$$\begin{aligned} E(x) &= Cx^2 \\ E(x+dx) &= C\,(x+dx)^2 \\ &= Cx^2 + 2Cx\,dx + C(dx)^2 \\ &\simeq Cx^2 + 2Cx\,dx \end{aligned}$$

Legg merke til tilnærmelsen vi gjør her: Vi neglisjerer $C(dx)^2$ i forhold til $2Cx\,dx$. Det kan vi trygt gjøre ettersom dx er en infinitesimal tykkelse, dvs vi er interessert i grensen $dx \to 0$.
Fluksen gjennom de to flatene får vi ved å multiplisere feltstyrken med arealet, dvs a^2. Dermed blir netto fluks ut gjennom den lille (infinitesimale) gaussflaten

$$d\phi = E(x+dx)a^2 - E(x)a^2 = 2Ca^2x\,dx$$

Ifølge Gauss' lov skal dette være lik ladningen inne i den tynne skiva dividert med ε_0. Ladningen inne i skiva kan vi skrive som *ladningstettheten* ρ multiplisert med volumet:

$$dq = \rho\,dV = \rho a^2\,dx$$

Dermed:

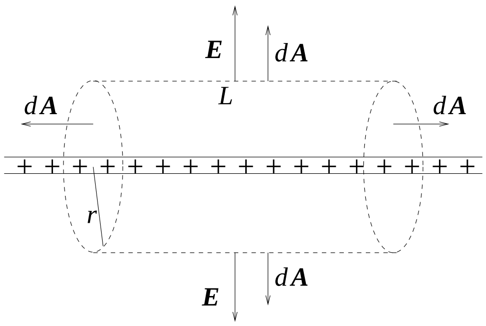
$$\begin{aligned} 2Ca^2x\,dx &= \frac{\rho a^2\,dx}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow \rho &= 2C\varepsilon_0 x \end{aligned}$$

Kommentarer:

- Merk at vi her har brukt Gauss' lov med en gaussflate som omslutter et differensielt volumelement. Det er helt i orden; vi velger selv hva som er en fornuftig gaussflate - stor eller liten. Men *lukket* må den være!
- I punkt b) bestemte du total ladning Q inne i kuben. Nå har du bestemt ladningstettheten ρ. Du kan jo kontrollere at de to svarene er konsistente!

Oppgave 2

En uendelig lang, jevnt ladet stav må resultere i et elektrisk felt som for det første er radielt rettet bort fra staven (evt inn mot staven, hvis den var negativt ladet), og for det andre kun avhengig av avstanden r fra staven. Med litt ettertanke innser vi da at det er lurt å velge en sylinder som gaussflate, slik at den ladete staven går langs sylinderens akse:



På sylinderflaten er da "flateelementvektoren" $d\boldsymbol{A}$ enten normal til $\boldsymbol{E}$ (på de to endeflatene) eller parallell med $\boldsymbol{E}$ (på resten av overflaten). Der $d\boldsymbol{A}$ er parallell med $\boldsymbol{E}$, dvs der vi får et bidrag til flateintegralet i Gauss' lov, har $E(r)$ overalt samme verdi og kan trekkes utenfor integralet. På de to endeflatene er $\boldsymbol{E}$ parallell med flaten (normal til flatenormalen!), så ingen elektrisk fluks går gjennom disse. Med en omkrets på $2\pi r$ og en lengde L blir arealet av sylinderoverflaten $2\pi rL$. Hvor mye ladning befinner seg innenfor denne gaussflaten? Med ladning λ pr lengdeenhet og lengde L må den bli $Q = \lambda L$.
Gauss' lov gir da:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = E(r) \cdot 2\pi rL = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

slik at det elektriske feltet blir

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Dette er nettopp hva vi fant i oppgave $3d$ i øving 2.

Oppgave 3

a) **C**. Det følger av Gauss' lov at flaten da omslutter en netto negativ ladning. På den lukkede flaten er flateelementvektoren $d\boldsymbol{A}$ definert positiv med retning *ut av* flaten. Med $\boldsymbol{E}$ overalt rettet innover blir da alle bidrag $d\phi = \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$ til fluksen gjennom den lukkede flaten negative. Den totale fluksen gjennom flaten er lik omsluttet ladning (delt på konstanten ε_0), som da også må være negativ.

b) **A**. Netto elektrisk fluks ut gjennom flaten skal ifølge Gauss' lov være lik netto omsluttet ladning delt på konstanten ε_0. Her er netto omsluttet ladning $q - q = 0$.

c) **D** Ifølge Gauss' lov er total elektrisk fluks gjennom en lukket flate som omslutter en punktladning q lik

$$\phi_{\text{tot}} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Av symmetrigrunner må det passere en like stor andel av denne fluksen ut gjennom overflaten av den inntegnede kuben som ut gjennom de "resterende" 7 kubene som skal til for å lage en kube med q i sentrum. (8 oktanter i et 3-dimensjonalt koordinatsystem!) Hver av disse 8 kubene har 3 "hosliggende" sideflater der $\boldsymbol{E}$ er parallell med flaten (dvs $\boldsymbol{E}$ normalt på flatenormalen). Altså går det ingen fluks gjennom disse. Videre har hver av de 8 kubene 3 likeverdige "motstående" sideflater, og den skraverte flaten er en av disse. Uten å regne kan vi fastslå at det må gå like stor fluks gjennom hver av disse 3. Den "store kuben" med q i sentrum har da i alt 24 slike likeverdige sideflater, og fluks gjennom hver av dem må bli

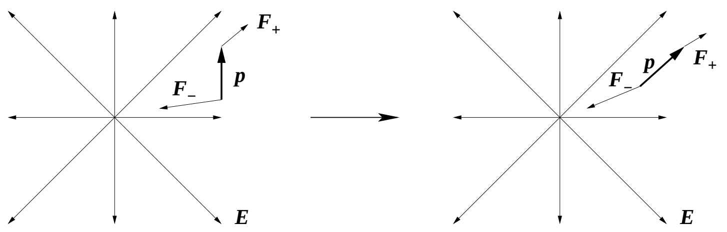
$$\phi = \frac{\phi_{\text{tot}}}{24} = \frac{q}{24\varepsilon_0}$$

Oppgave 4

a) På den positive ladningen virker en kraft $\boldsymbol{F}_+ = q\boldsymbol{E}$ og på den negative ladningen virker en kraft $\boldsymbol{F}_- = -q\boldsymbol{E}$. Total kraft blir summen av disse:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_+ + \boldsymbol{F}_- = q\boldsymbol{E} - q\boldsymbol{E} = 0$$

Kommentar: Hvis det elektriske feltet ikke er uniformt, vil det virke en netto kraft på dipolen:



Den ene enden av dipolen (her: den nederste, dvs den negative enden) vil være i et område med større elektrisk feltstyrke enn det er ved den andre enden av dipolen. Dermed vil dipolen trekkes i retning av økende elektrisk feltstyrke. Det er denne effekten som gjør seg gjeldende når en gnidd ballong sitter fast på veggen. Ballongen har netto ladning og omgir seg med et ikke-uniformt elektrisk felt. Elektriske dipoler i veggen tiltrekkes av ballongen, eller omvendt, ballongen trekkes mot veggen.

b)

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r}_+ \times \boldsymbol{F}_+ + \boldsymbol{r}_- \times \boldsymbol{F}_- = \frac{\boldsymbol{a}}{2} \times (q\boldsymbol{E}) + \left(-\frac{\boldsymbol{a}}{2}\right) \times (-q\boldsymbol{E}) = q\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$$

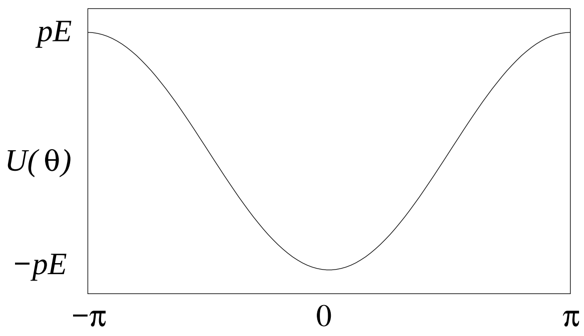
Bruker vi høyrehåndsregelen, ser vi at vektoren $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$ peker inn i papirplanet, dvs i negativ z-retning. Dermed:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{p} = -pE \sin\theta \, \hat{z}$$

c) Her har vi altså $dU = -\tau \, d\alpha$. Det betyr at en liten dreining av dipolen en vinkel $d\alpha$ under påvirkning av dreiemomentet τ resulterer i en endring dU i potensiell energi gitt ved $-\tau \, d\alpha$. Potensiell energi for en gitt verdi av vinkelen θ mellom $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{p}$, *i forhold til* en valgt referanse $U(\theta_0)$, blir da

$$\begin{aligned} U(\theta) &= \int_{\theta_0}^{\theta} dU \\ &= -\int_{\theta_0}^{\theta} \tau(\alpha) \, d\alpha \\ &= pE \int_{\theta_0}^{\theta} \sin\alpha \, d\alpha \\ &= pE \left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right) \\ &= -pE \cos\theta \end{aligned}$$

Her valgte jeg å sette $U(0) = -pE$, dvs $\theta_0 = \pi/2$. Det spiller *ingen* rolle hvor jeg velger nullpunkt for U. Et like "naturlig" valg ville ha vært $\theta_0 = 0$, som hadde gitt $U(0) = 0$ og $U(\pm\pi) = 2pE$.
Skisse:



Vi har minimal U, og følgelig stabil likevekt for $\theta = 0$, dvs for dipolen orientert slik at $\boldsymbol{p}$ er parallell med $\boldsymbol{E}$.
Konklusjon: Elektriske dipoler, f.eks. polare molekyler i et dielektrikum, retter seg inn langs det ytre ("påtrykte") elektriske feltet.