Institutt for fysikk, NTNU
FY1003/TFY4155 Elektromagnetisme

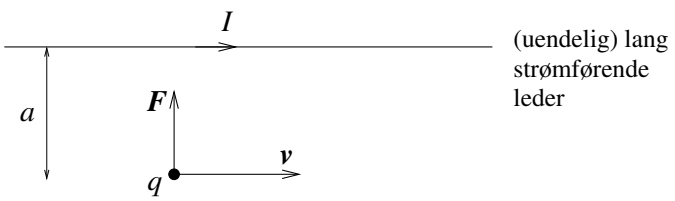
2. april 2008

MAGNETFELT OG MAGNETISME SOM RELATIVISTISK FENOMEN

(orienteringsstoff; ikke pensum til eksamen)

Utgangspunkt: Anta at vi kjenner til Coulombs lov og elektriske krefter. Vi vet derimot *ingenting* om magnetfelt og magnetisme.

Vi gjør så et eksperiment:



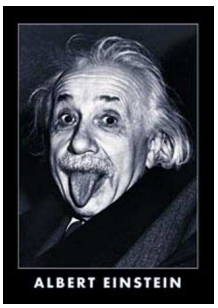
... og måler til vår store overraskelse en kraft på ladningen q:

$$F = k\frac{I}{a}qv$$

med retning inn mot lederen dersom $q > 0$.
(Retning vekk fra lederen dersom q, I eller v skifter fortegn.)

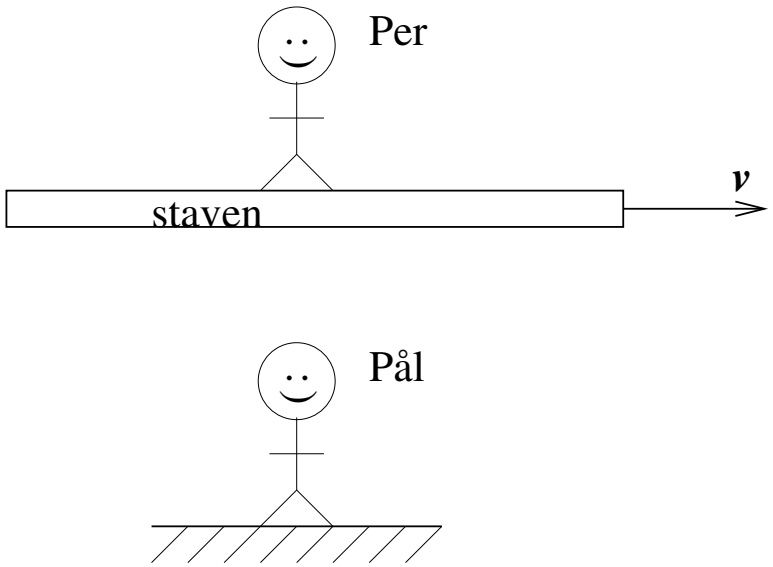
Lederen er *elektrisk nøytral* $\Rightarrow$ den elektriske kraften må være *null* !

HVOR KOMMER KRAFTEN F FRA??



Løsning: Relativitetsteori!

Lorentzkontraksjon:



Per: Stavens lengde er L.

Pål: Stavens lengde er $L/\gamma < L$.

Her er:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \geq 1$$

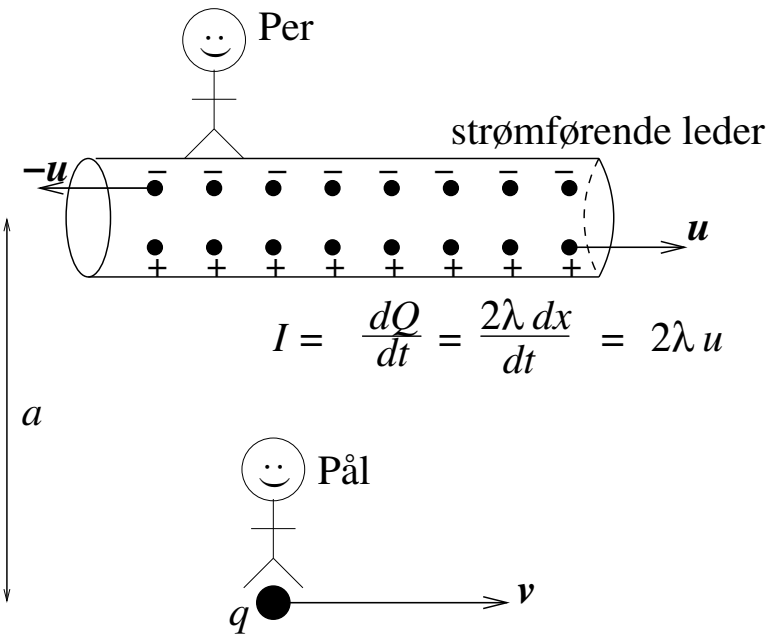
med c = lyshastigheten (= 299792458 m/s $\simeq 3 \cdot 10^8$ m/s) og v = hastigheten til staven og Per (i stavens lengderetning) i forhold til Pål.

Eksempel: Per er i ro i forhold til staven og måler dens lengde til 1 m. Pål ser en stav som har en hastighet $v = 30000$ km/s. Da er $v^2/c^2 = 10^{-2}$ og Pål vil si at stavens lengde er 0.995 m, dvs 5 mm kortere.

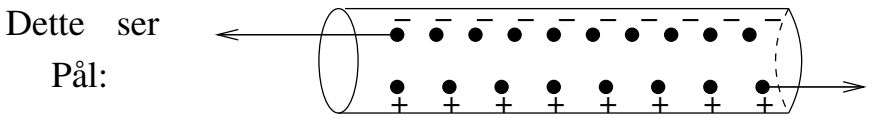
Altså:

Objekter i bevegelse er kortere enn når de er i ro!

Konsekvenser av Lorentzkontraksjon for ladningen q som er i bevegelse langs den strømførende lederen:



Per: Lederen har negativ ladning $-\lambda$ pr lengdeenhet og positiv ladning λ pr lengdeenhet. Alt i alt er lederen *elektrisk nøytral*.



Pål: Lederen har negativ ladning $-\lambda_-$ pr lengdeenhet og positiv ladning λ_+ pr lengdeenhet. De negative ladningene har *størst* hastighet i forhold til meg. På grunn av *størst* Lorentzkontraksjon ligger derfor disse *tettere* enn de positive ladningene. Altså er $\lambda_- > \lambda_+$. Alt i alt er lederen *ikke elektrisk nøytral*; den har en *netto negativ ladning* $\Delta\lambda = -\lambda_- + \lambda_+ < 0$.

Dermed måler Pål en *tiltrekkende elektrisk kraft* på ladningen q:

$$F_{\text{Pal}} = F_e = qE = q \cdot \frac{\Delta\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

der vi har brukt at elektrisk felt i avstand a fra en uendelig lang stav med ladning $\Delta\lambda$ pr lengdeenhet er (se øving 2, oppgave 3d og øving 5, oppgave 2) $E = \Delta\lambda/2\pi\varepsilon_0 a$

So what? *Vi* er typisk i Pers situasjon, dvs på laben, i ro i forhold til lederen, og hvem har sagt at Per, som ser en nøytral leder, vil måle en kraft på q?

Jo, det sier Einstein, med sitt *relativitetsprinsipp*:

> Fysikkens lover gjelder i alle *inertialsystemer*, dvs i alle referansesystemer som er i ro eller i konstant hastighet.

Dermed: Hvis Pål måler en kraft på q, *må* også Per måle en kraft på q!

Kvantitativt:

$$F_{\text{Per}} = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, F_{\text{Pal}} = \frac{1}{\gamma}\, F_{\text{Pal}}$$

$$\Delta\lambda = \frac{2\lambda v u}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2\lambda v u}{c^2} \cdot \gamma$$

...som vi her simpelthen godtar uten bevis...
(Se notat på fagets hjemmeside for flere detaljer.)

Dermed:

$$\begin{aligned} F_{\text{Per}} &= \frac{1}{\gamma} \cdot q \cdot \frac{2\lambda v u}{2\pi\varepsilon_0 a c^2} \cdot \gamma \\ &= qv\frac{2\lambda u}{2\pi\varepsilon_0 c^2 a} \\ &= qv\frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2 a} \end{aligned}$$

Som i eksperimentet vårt, med

$$k = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c^2} = 2 \cdot 10^{-7}\,\text{Vs/Am}$$

(dvs en naturkonstant)

La oss skrive

$$F_{\text{Per}} = F_m = qvB$$

med

$$B = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2 a}$$

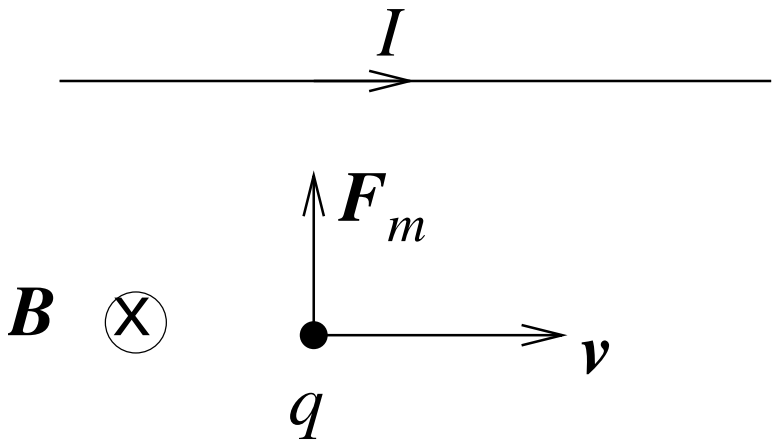
Størrelsen B er nettopp *magnetfeltet* (her: i avstand a fra en lang, rett strømførende leder med strøm I), og F_m er den *magnetiske kraften* på ladningen q med hastighet v.

Merk at vi har fått oppklart to viktige spørsmål:

Hvor kommer magnetfeltet fra?
Svar: Fra ladninger i bevegelse, dvs *elektrisk strøm.*

Hvordan virker den magnetiske kraften på en ladning i bevegelse?
Svar: $F_m = qvB$

Men hvordan uttrykke $F_m = qvB$ på *vektorform*? Både $\boldsymbol{F}_m$ og $\boldsymbol{v}$ er jo vektorer, men ikke parallelle vektorer....
Vi må ty til *kryssprodukt*! La $\boldsymbol{B}$ være en vektor som peker inn i planet:



Da ser vi at vi kan skrive:

$$\boldsymbol{F}_m = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

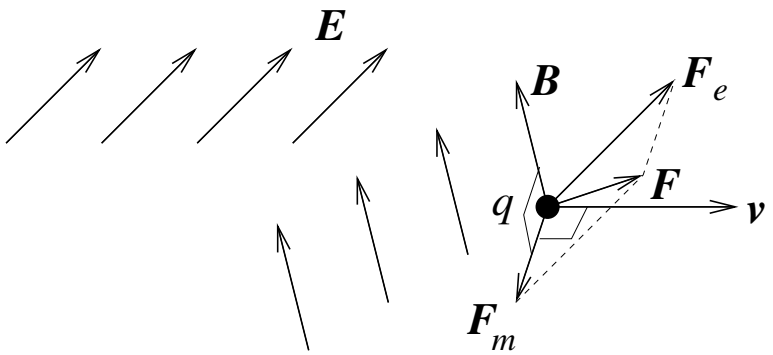
KONKLUSJON: (og dette er selvsagt pensum!)

Fra før: Elektrisk felt $\boldsymbol{E}$ lages av ladninger (i ro eller i bevegelse) og resulterer i elektrisk kraft på ladninger (i ro eller i bevegelse):

$$\boldsymbol{F}_e = q\boldsymbol{E}$$

Nå: Magnetfelt $\boldsymbol{B}$ lages av strøm (dvs ladninger i bevegelse) og resulterer i magnetisk kraft på ladninger i bevegelse:

$$\boldsymbol{F}_m = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

Med både $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ til stede samtidig, påvirkes ladningen q med hastighet $\boldsymbol{v}$ av *Lorentzkraften*

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{F}_m = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$